ACADÉMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le grade de Docteur de Troisième Cycle PHYSIQUE THEORIQUE
Mention ASTROPHYSIQUE

CLASSIFICATION DES MODELES D'UNIVERS
ETUDE DES INHOMOGENEITES
A L'AIDE DE LA SYMETRIE SPHERIQUE

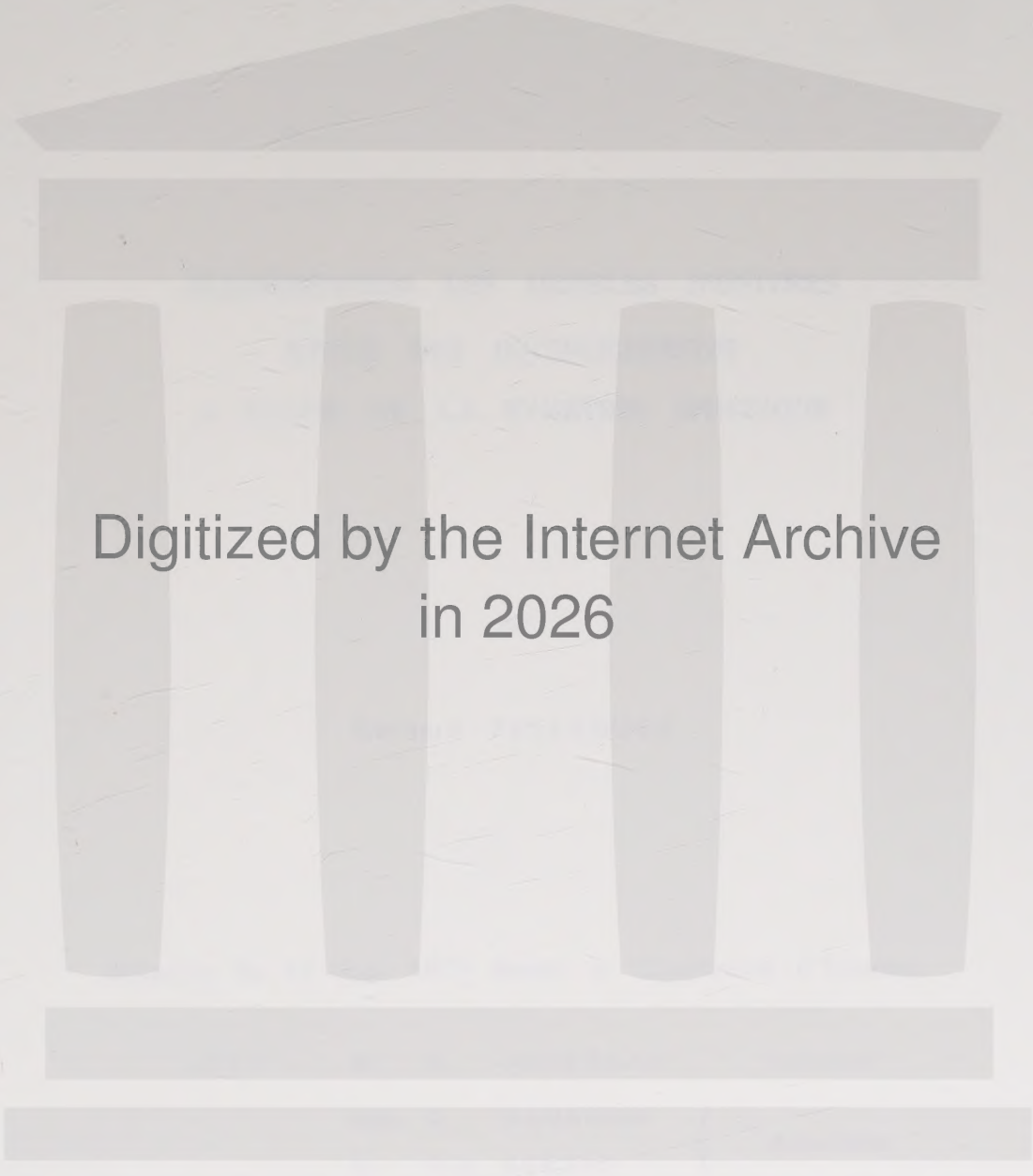
par

Bernard PELLEQUER

Soutenue le 14 Juin 1979 devant la Commission d'Examen.

JURY : M. H. ANDRILLAT — Président
Mlle S. MAVRIDES, M. F.M. RENARD — Assesseurs

ATELIER DUPLICATION
— U.S.T.L. —



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546012_0034

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le grade de Docteur de Troisième Cycle PHYSIQUE THEORIQUE
Mention ASTROPHYSIQUE

CLASSIFICATION DES MODELES D'UNIVERS
ETUDE DES INHOMOGENEITES
A L'AIDE DE LA SYMETRIE SPHERIQUE

par

Bernard PELLEQUER

Soutenue le 14 Juin 1979 devant la Commission d'Examen.

JURY : M. H. ANDRILLAT — Président
Mlle S. MAVRIDES, M. F.M. RENARD — Assesseurs

ATELIER DUPLICATION
— U.S.T.L. —

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

U N I V E R S I T E
DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DU LANGUEDOC

L I S T E D E S P R O F E S S E U R S

Président : L. THALER

Vices-Présidents MM. CORRIU, PIETRASANTA et NOUAZE

Doyens Honoraires à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc :

P. MATHIAS
B. CHARLES
A. CASADEVALL

Président Honoraire :
P. DUMONTET

Professeurs Honoraires de l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc :

-R. JACQUES
-M. CASTERAS
-E. TURRIERE
-C. CAUQUIL
-G. DENIZOT
-J. GRANIER
-Ch. BOUHET
-J. SALVINIEN
-M. MOUSSERON
-P. CHATELAIN
-A.M VERGNOUX
-E. KAHANE
-Ch. SAUVAGE
-J.M MORETTI
-G. COUCHET
-P. DEMANGEON

Secrétaire Général :
E. SIAU

Professeurs titulaires :

-M. J.-P. ROIG ..... Physique
-M. J. AVIAS ..... Géologie
-M. J.-J. MOREAU ..... Mécanique rationnelle
-M. B. CHARLES ..... Mathématiques pures
-M. R. JOUTY ..... Physique
-M. R. LEGENDRE ..... Zoologie
-M. I. ASSENMACHER ..... Physiologie animale

M. Ch. ROUMIEU	Analyse supérieure
M. J. ROBIN	Physique
M. B. PISTOULET	Physique
M. A. POTIER	Chimie minérale
M. R. LAFONT	Physique
M. R. JACQUIER	Chimie
M. J. FALGUEIRETTES	Minéralogie
M. J. REGNIER	Chimie
Mme J. CHARLES	Mathématiques
M. J. ROUZAUD	Chimie
M. P. CAILLON	Physique
M. H. CHRISTOL (E.N.S.C.M.)	Chimie
M. H. ANDRILLAT	Astronomie
Mme G. VERNET	Biologie animale
M. L. CECCHI	Physique
M. L. EUZET	Zoologie
M. C. DELOUPY	Physique
M. M. MATTAUER	Géologie
M. M. SAVELLI	Physique
M. R. MARTY	Psychophysiologie
M. A. BONNET	Botanique
M. G. LAMATY	Chimie
Mme S. ROBIN	Physique
M. R. CORRIU	Chimie
Mme N. PARIS	Physiologie végétale
M. J. ZARZYCKI	Sciences des matériaux
M. M. MAURIN	Chimie minérale
M. L. THALER	Paléontologie
M. S. GROMB	Chimie physique
M. J.V. ZANCHETTA	Chimie générale
M. P. SABATIER	Mathématiques
M. F. SCHUE	Chimie organique
M. E. GROUBERT	Physique
M. Ch. CASTAING	Mathématiques
M. M. ROUZEYRE	Physique
M. F. PROUST	Géologie
M. J. PARIS	Biologie animale

- M. A. GROTHENDIECK ..... Mathématiques
- M. C. DURANTE ..... Physique
- M. G. BOUGNOT ..... Physique
- M. G. LECOY ..... E. E. A.
- M. R. GAUFRES ..... Chimie
- M. J.D. BAYLE ..... Physiologie animale
- M. J.L. IMBACH ..... Chimie
- M. J.P. FILLARD ..... E. E. A.
- M. N. ROBY ..... Mathématiques
- M. Ph. JEANTEUR ..... Biochimie

Professeurs sans chaire :

- M. G. TOURNE ..... Chimie
- M. J. REMY ..... Géologie
- Mme H. GUASTALLA ..... Biologie physico-chimique
- M. R. LENEL ..... Biologie animale
- M. A. BASSOMPIERRE ..... Physique
- M. R. JONARD ..... Botanique
- M. R. CANO (I.U.T.) ..... Mesures physiques
- M. P. MOLINO ..... Mathématiques
- M. J. LEGRAND ..... Physiologie animale
- M. J. D'AUZAC ..... Physiologie végétale
- M. G. BOUIX ..... Zoologie
- M. M. AMANIEU (I.S.I.) ..... Hydrologie et mariculture
- M. M. DENIZOT ..... Biologie végétale
- M. B. BRUN ..... Chimie physique
- M. L. GIRAL ..... Chimie organique
- M. J.P. QUIGNARD ..... Zoologie
- M. Ph. VIALLEFONT ..... Chimie
- M. A. RAIBAUT ..... Zoologie
- M. P. VITSE ..... Chimie minérale
- M. J. GRIMAUD (E.N.S.C.M.) ..... Chimie
- M. J. GARCIA (I.U.T. Nimes) ..... Génie mécanique
- M. P. LOUIS ..... Géophysique appliquée
- M. Cl. BOCQUILLON ..... Hydrologie
- M. A. DONNADIEU ..... Physique

- M. M. LEFRANC ..... Mathématiques
- M. G. MASCHERPA ..... Chimie
- M. C. GOUT ..... Physique
- M. J.P. TRILLES ..... Biologie appliquée
- M. F. HALLE ..... Biologie végétale
- M. G. BORDURE ..... Génie électrique
- M. J.P. NOUGIER ..... Electronique
- M. M. GODRON ..... Ecologie végétale
- M. L. LASSABATERE ..... E. E. A.
- M. J. LAPASSET ..... Physique - mesure physique
- M. M. AVEROUS ..... Physique - Génie électrique

Professeurs Associés :

- M. A. MICALI ..... Mathématiques
- M. H. BILGER ..... Physique
- M. G. AUBERSON ..... Mathématiques

Professeurs associés d'Université :

- M. L. DAUZIER ..... Physiologie animale
- M. GALZY ..... Biochimie
- M. C. MAURIN ..... Biologie animale
- M. R. SENOUILLET ..... Economie et gestion
- M. E. SERVAT ..... Géologie
- M. C. VAGO ..... Biologie animale
- Mme M. VAN CAMPO ..... Biologie végétale
- M. E. VERDIER ..... Chimie
- M. F. WINTERNITZ ..... Chimie

Maîtres de conférences :

- M. G. LOUPIAS ..... Mathématiques
- M. R. HAKIM ..... Mathématiques
- M. F. LAPSCHER ..... Mathématiques
- M. J. CROUZET (I.S.I.) ..... Biochimie appliquée
- M. A. COMMEYRAS ..... Chimie organique
- Mlle M. LEVY (I.U.T.) ..... Chimie

- M. J. LAGARRIGUE (I.U.T.) ..... Biologie appliquée
- M. Cl. DROGUE (I.S.I.) ..... Hydrogéologie
- M. P. GENESTE (E.N.S.C.M.) ..... Chimie physique appliquée
- M. J. CHEFTEL (I.S.I.) ..... Biochimie appliquée à l'alimentation
- M. Y. PIETRASANTA (E.N.S.C.M.) ..... Chimie appliquée
- M. B. LEMAIRE (I.S.I.) ..... Mathématiques appliquées Informatique
- M. H. MATHIEU ..... E. E. A.
- M. M. VALADIER ..... Mathématiques
- M. J.L. ROBERT (I.U.T. Nimes) ..... Génie électrique
- M. O. MAISONNEUVE ..... Mécanique
- M. R. BRUNEL ..... Physique
- M. M. CADENE ..... Physique
- M. P. DELORD ..... Physique
- M. A. PAVIA ..... Chimie
- M. J.M. BESSIERES ..... Chimie
- M. J.P. BARD ..... Géologie
- M. P. JOUANNA (I.U.T. Nimes) ..... Génie Civil
- M. R. BEN AIM (I.S.I.) ..... Génie chimique et traitement des eaux
- M. P. BESANCON ..... Physiologie de la nutrition appliquée à l'alimentation
- M. Y. NOUAZE ..... Mathématiques
- M. J. PETRISSANS ..... Chimie
- M. J.Y. GAL ..... Chimie analytique appliquée
- M. C. BENOIT ..... Physique
- M. H. GIBERT (I.S.I.) ..... Génie alimentaire
- M. A. LIEGEOIS ..... Automatique
- M. L. COT (E.N.S.C.M.) ..... Chimie
- M. B. TARODO DE LA FUENTE (I.S.I.) ..... Biochimie appliquée et Techniques des matières alimentaires
- M. Y. ESCOUFIER ..... Informatique
- M. A. SANS ..... Psychophysiologie
- M. G. DURAND ..... Chimie
- M. B. FILLIATRE ..... Informatique et gestion
- M. J.J. MACHEIX ..... Physiologie végétale

- M. P. HINZELIN ..... Génie civil
- M. Cl. BOKSENBAUM ..... Informatique
- M. G. CAMBON ..... E. E. A.
- M. J. FERRIE ..... Informatique
- M. E. AKUTOWICZ ..... Mathématiques
- M. D. AUVERGNE ..... E. E. A.
- M. B. LEBLEU ..... Biochimie

Maître de conférences agrégé :

- M. R. REIX ..... Sciences de gestion

Maîtres de conférences associés :

- M. M. PETRICH ..... Mathématiques
- M. D. LEE ..... Botanique

Chargé d'enseignement :

Néant

Chargé des fonctions de maître de conférences :

- M. G. SAUMADE (I.U.T.) ..... G. E. A.
  (Economie des entreprises)

Chargés de cours :

- M. M. MOUTON (I.U.T.) ..... Economie et gestion
- M. Ph. FOUCOU (I.U.T.) ..... Sciences économiques

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur H. ANDRILLAT de m'avoir acceuilli au Laboratoire d'Astronomie de Montpellier. C'est grâce à ses encouragements et à ses conseils que j'ai pu mener à bien cette thèse. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Mademoiselle, S. MAVRIDES, Professeur à l'Observatoire de Paris a bien voulu analyser le manuscrit de mon travail et m'apporter des remarques précieuses. Sa présence au jury confère à cette thèse un très grand honneur. Qu'elle trouve ici l'expression de ma très grande reconnaissance.

Je suis très reconnaissant à Monsieur F.M. RENARD, Maître de Recherche, de l'honneur que m'apporte sa participation au jury.

Je remercie tous les membres du Laboratoire d'Astronomie de leur collaboration et en particulier Madame J. ROQUES pour la frappe du manuscrit.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

1ère Partie : CLASSIFICATION DES MODELES D'UNIVERS

1. DESCRIPTION DES MODELES - GENERALITES 4

1.1. Univers "doublement" homogènes 4

1.2. Univers spatialement homogènes 6

1.2.1. Le ds^2 de Robertson

1.2.2. Propriétés déduites de la métrique

1.2.3. Modèles de Friedmann

1.2.4. Accord avec les observations

1.2.5. Notion de vitesse d'expansion

1.3. Univers inhomogènes 20

1.3.1. Rotation et distorsion

1.3.2. Modèles inhomogènes et isotropes

2. CLASSIFICATION DES MODELES 25

2.1. Classification invariante des champs de gravitation 25

2.1.1. Classification de Petrov

2.1.2. Classification de Pirani

2.1.3. Conséquences

2.2. Une classification des modèles homogènes 32

2ème Partie : INHOMOGENEITES - ANISOTROPIE

1. INTRODUCTION - ISOTROPIE ET HOMOGENEITE 37

1.1. Introduction 37

1.2. Notions sur l'isotropie 37

2. ISOTROPIE DE L'UNIVERS A GRANDE ECHELLE 41

2.1. Position du problème 41

2.2. Perturbations homogènes et anisotropes 42

2.3. Discussion 45

3. EVOLUTION DES MODELES COSMOLOGIQUES INHOMOGENES 46

3.1. Les modèles à symétrie sphérique 46

3.1.1. Solution de Tolman

3.1.2. Solution pour $f(r) = 1$

3.1.3. Solution pour $f(r) > 1$

3.1.4. Solution pour $f(r) < 1$

3.1.5. Récapitulation - Détermination de $f(r);F(r);\beta(r)$

3.2. Inhomogénéités à symétrie sphérique 56

3.2.1. Solution pour les modèles paraboliques

3.2.2. Condensation décrite par un modèle elliptique

3.2.3. Approximation du modèle elliptique à un arc de cercle

3.3. Modèles sans symétrie spatiale 65

4. POURQUOI L'ISOTROPIE ACTUELLE ? 68

CONCLUSION 71

BIBLIOGRAPHIE 72

I N T R O D U C T I O N

La Cosmologie, étude de l'univers dans son ensemble, permet la synthèse de modèles à partir des données d'observation et des résultats mathématiques. Si on veut que le modèle cerne de plus près la réalité, il est nécessaire d'avoir de bonnes observations. La rareté des observations a permis à de nombreuses théories de coexister sans qu'il soit pour autant possible de faire un choix déterminant. Toutefois, deux découvertes marquantes dans l'histoire de la cosmologie récente ont permis de dégager certains modèles. La première de ces découvertes fut l'observation d'un décalage spectral par Hubble en 1929, se manifestant par un déplacement vers le rouge des raies spectrales d'un corps céleste éloigné. L'interprétation de ce décalage comme expansion de l'univers est le fait marquant de ce début de siècle.

Le second évènement fût bien sûr la découverte en 1964 d'une radiation "cosmique isotrope, non polarisée, dénuée de variations saisonnières" sur des longueurs d'ondes centimétriques correspondant à un rayonnement rélicte à $2,65 \pm 0,05$ degrès Kelvin et interprété comme résidu d'une explosion primordiale de l'univers (on dit encore primeval fireball ou Big Bang). Un tel fait permet d'éliminer les modèles d'univers ne prenant pas en compte un Big Bang originel. C'est pourtant bien la remarquable isotropie de ce rayonnement qui permet de vérifier le principe d'isotropie de l'univers. Ce principe, avec l'hypothèse d'homogénéité constitue ce que (I.) Bondi a nommé le "principe cosmologique".

- A l'exception des irrégularités locales, l'univers présente le même aspect quel que soit l'endroit d'où on l'observe.

Faisant notre ce principe, nous dirons que l'univers à grande échelle est isotrope (à savoir, les propriétés générales de l'univers sont indépendantes de la direction d'observation) et homogène (les propriétés de l'univers considéré dans son ensemble sont les mêmes quel que soit l'endroit considéré).

Il serait possible de rétorquer que l'univers ainsi homogène ne présente une symétrie sphérique que par rapport à la Terre. Ceci laisserait la place à l'idée d'un univers inhomogène dans lequel il existerait un point d'où l'isotropie serait observée. Mais nous touchons là un des points sensibles de l'histoire de l'Astronomie à savoir l'anthropocentrisme. Cette idée ayant été successivement abandonnée à l'époque de Copernic (abandon du géocentrisme) puis de la prise de conscience de la notion de galaxie (abandon de l'héliocentrisme). On chercha quelque temps un "soleil central" base d'un futur galactocentrisme mais le développement d'observation et l'avènement de la Relativité générale laissèrent ces recherches vaines et firent simultanément éclater la notion même d'univers en abolissant l'idée d'un centre universel et en montrant que l'univers n'est plus statique.

Aussi la notion d'homogénéité à grande échelle sera retenue puisqu'il n'y a aucune raison pour faire occuper à la Terre (ou au soleil, ou à la galaxie ...) une position priviligiée.

Ainsi, les modèles décrivant le plus généralement l'univers sont homogènes. La simplification habituelle consiste alors à considérer l'univers comme un continu. C'est l'idée que l'on adopte en considérant l'ensemble des galaxies comme un fluide matériel continu, homogène et isotrope possédant à un instant déterminé une densité et une pression données.

Ce fluide possède une particularité : son inhomogénéité locale. Considérons en effet le système solaire : sa nature inhomogène est évidente (à titre d'exemple considérons que la densité de la Terre en surface est de $3 g/cm^3$ alors que la densité moyenne de l'univers est voisine de $10^{-30} g/cm^3$ soit un rapport de 1 à 10^{30}). Portant nos observations au delà du système solaire on découvre la cellule de base de ce fluide : la galaxie. Là encore un simple calcul nous montre que nous avons à faire à une super condensation :

> En assimilant la galaxie à une sphère on a le volume $V = 4/3\pi R^3$. Prenons $R = 5. 10^4$ a.l. et la masse est évaluée pour les galaxies spirales Sb ou SBb à environ $M = 40. 10^9$ masses solaires. Alors la densité d'une galaxie est évaluée à $10^{-10} g/cm^3$ soit un rapport de 1 à 10^{20} entre la densité d'une galaxie et la densité moyenne de l'univers.

On réalise bien ainsi l'idée d'une structure en grumeaux de l'univers. A grande échelle on retient donc l'idée d'un continu de grumeaux accompagnant le principe d'homogéneité et les modèles correspondants ; à l'échelle de la galaxie l'existence de matière condensée entraine la construction de modèles inhomogènes. Un modèle homogène va donc très mal s'adapter au traitement des inhomogéneités et la nécessité des deux types de modèles s'impose.

1ère PARTIE

CLASSIFICATION DES MODELES D'UNIVERS

1. DESCRIPTION DES MODELES - GENERALITES

Nous avons remarqué que le manque d'observations ne permet pas de faire une discrimination efficace parmi les nombreux modèles d'univers. Aussi il est bon de rappeler certains d'entre eux. En partant de la plus grande homogénéité vers l'inhomogénéité il est possible de faire une classification.

1.1 *UNIVERS "DOUBLEMENT" HOMOGENES*

Considérant un univers identique en tout point de l'espace et du temps on peut dire que toutes les grandeurs physiques sont les mêmes en tout point de la variété. Un espace-temps quadridimensionnel possédant une telle propriété ne sera pas évolutif. Un observateur appartenant à un tel univers n'a aucun moyen pour déterminer le lieu et le moment où il se trouve. En particulier un tel espace possédant sa ligne de temps homogène sera tel qu'un observateur se déplaçant dans le temps ne constatera aucune modification. Les modèles statiques d'univers font donc partie de cette catégorie.

Afin de détailler davantage ce type d'univers il est bon de revenir à l'idée de continu dont il était question dans l'introduction. En effet, afin d'avoir une schématisation maximum on considère l'ensemble des galaxies (formant un système discontinu) comme un fluide parfait, homogène et isotrope. La variété Riemanienne décrivant un tel fluide est régie par la solution des équations d'Einstein dont la formulation en notation covariante est :

$$\frac{1}{2}\ g_{\mu\nu}\ R - R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = k.\ T_{\mu\nu} \qquad (I,1)$$

$R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci

$T_{\mu\nu}$ est le tenseur impulsion-énergie

Λ est appelée constante cosmologique ; elle donne toute leur généralité aux équations du champ et peut bien sûr être annulée pour les calculs simplifiés.

k est un coefficient numérique dont la valeur est

$$k = 8\pi \frac{f}{c^4} \qquad f \text{ étant la constante de la gravitation.}$$

Dans l'hypothèse d'un fluide parfait, le tenseur impulsion-énergie (qui n'est fonction que de la pression et de la densité) prend la forme :

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)\, u_\mu\, u_\nu - p g_{\mu\nu} \qquad (I,2)$$

u_μ étant la quadrivitesse $(u_\mu\, u^\mu = 1)$ d'un élément du fluide.
La métrique la plus générale décrivant un espace statique est

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

puisque le principe cosmologique a été adopté on se propose d'écrire cette métrique dans une forme à symétrie sphérique de telle sorte que :

$$ds^2 = - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + e^\nu c^2 dt^2 \qquad (I,3)$$

où λ et ν sont des fonctions de r uniquement puisque les modèles sont statiques.
A partir des équations du champ, de la forme du tenseur impulsion-énergie et de l'équation des gaz parfaits $(\frac{dp}{dr} = 0); \frac{dp}{dr} = - (\frac{p+\rho}{2})\, \nu'$ on constate qu'il n'y a que trois modèles statiques possibles :

$\nu' = 0$ correspondant à l'univers statique d'Einstein
$p + \rho = 0$ correspondant à l'univers statique de De Sitter
$p + \rho = 0$ et $\nu' = 0$ qui n'est autre que l'univers plat de Minkowski.

Notons que les univers d'Einstein et Minkowski n'expliquent pas l'existence d'un décalage spectral tandis que l'univers de De Sitter prévoit l'existence d'un tel décalage mais décrit un univers vide de matière.

Ces modèles sont donc très éloignés de la réalité (existence de matière, observations d'un décalage spectral interprété comme expansion de l'univers) et ne présentent pas un intérêt cosmologique.

Il est bon à ce propos de parler du modèle de Hoyle, modèle statique à création continue de matière. Ce modèle servit essentiellement à trouver une solution aux équations du champ de Hoyle (équations d'ailleurs indéterminées).

On pourrait aussi rappeler dans cette catégorie les modèles de Gödel ainsi que tous les modèles vides de matière mais leur manque de réalité physique n'autorise pas que l'on s'y attarde davantage.
Il est intéressant de remarquer que ces modèles ont eu longtemps du succès car ils sont les seuls à permettre une connaissance totale en cosmologie. Nous verrons que les modèles non statiques ne laissent pas une telle ouverture.

1.2 *UNIVERS SPATIALEMENT HOMOGENES*

Le concept d'homogénéité est applicable à l'espace-temps à quatre dimensions comme nous l'avons vu en 1.1 mais on peut toujours l'appliquer aux espaces de dimension inférieure. En particulier pour une homogénéité concernant les trois dimensions d'espace nous aurons des univers spatialement homogènes.

Une dimension d'homogénéité a donc disparu par rapport au type précédent. Cette dimension concerne la ligne de temps qui, perdant son homogénéité va nous permettre d'aborder les modèles non statiques. Ainsi cette classe d'univers va nous donner la possibilité de rattacher des modèles mathématiques aux observations.

De cet univers homogène et isotrope, nous n'observons que son expansion (loi de Hubble) sur la partie visible. Partant de ce modèle non statique nous conserverons l'idée de fluide parfait continu (c'est toujours possible si l'on se place à grande échelle) et bien sûr homogène et isotrope. Mais la différence avec le type vu en 1.1 réside dans le fait que la densité et la pression moyenne ne sont plus des constantes par rapport au temps pour un observateur local.

Alors le principe cosmologique prend la forme suivante : l'univers présente le même aspect pour tout observateur à un instant donné - (du temps).

Hors, cette définition soulève une question "à un instant donné" d'accord mais de quel temps? En théorie Newtonienne il n'y a pas d'ambiguité. En Relativité restreinte il y a une légère ambiguité en raison de la non universalité de la simultanéité (cette ambiguité disparait dès que l'on a défini un repère inertiel de référence). En Relativité générale, il n'existe pas de repère inertiel global et donc l'idée "à un instant donné du temps" est ambigüe. Aussi on préfère introduire la notion d'hypersurface tri-dimensionnelle du genre espace.
Pour chaque évènement se produisant sur une telle hypersurface, il existe un repère de Lorentz local donc la surface de simultanéité coïncide localement avec l'hypersurface. Ce repère de Lorentz est le seul dont la quadrivitesse est orthogonale à l'hypersurface. Ainsi il est possible de remplacer l'expression : "à un instant donné" par cette autre "sur une hypersurface donnée du genre espace".
L'homogénéité de l'univers signifie, alors, qu'à travers chaque évènement dans l'univers il passe une hypersurface d'homogénéité du genre espace. Le concept d'isotropie peut alors être complété en remarquant que seul un observateur comobile avec le fluide peut observer l'isotropie de ce dernier. L'isotropie garantit que les lignes d'univers du fluide sont orthogonales à chaque hypersurface d'homogénéité. Le principe cosmologique étant ainsi précisé on peut envisager l'étude des modèles d'univers spatialement homogènes et non statiques à savoir les modèles de Friedmann-Robertson-Walker. L'étude de ces modèles n'est pas à négliger puisqu'ils constituent le type qui cerne le mieux la réalité (observée) de l'univers.

1.2.1 *LE ds^2 DE ROBERTSON* [2]

La métrique non statique la plus générale est de la forme :

$$ds^2 = - e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2) + e^{\nu} c^2 dt^2 + 2 g_{14} dr.dt \qquad (I,4)$$

où λ, μ, ν et g_{14} sont des fonctions de r et de t.

La composante radiale correspond au terme en dr^2 et la composante tangentielle au terme en $(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2)$ d'où le même choix du coefficient e^{μ}.

A partir de la transformation $dt' = f(r,t)\ (g_{14}\ dr + e^{\nu}\ dt)$ où $f(r,t)$ sert à faire du second nombre une différentielle exacte, on peut réécrire la forme générale de la métrique non statique :

$$ds^2 = - e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2) + e^{\nu} dt^2 \qquad (I,5)$$

où λ, μ, et ν constituent d'autres fonctions de r et de t.

Après de longues transformations se résumant à du calcul, la métrique prend la forme :

$$ds^2 = \frac{- R(t)^2}{(1+k\rho^2/4)^2} (d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\varphi^2) + c^2 dt^2 \qquad (I,6)$$

avec $\rho = \frac{r}{R_o}$ et $R(t)^2 = R_o^2 . e^{\vartheta(t)}$

Finalement c'est à Robertson que l'on doit l'aspect définitif de la métrique.

En posant $r = \frac{\rho}{1+k\rho^2/4}$ on a :

$$ds^2 = -R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right] + c^2 dt^2 \qquad (I,7)$$

R(t) étant une fonction du temps seulement qui peut être assimilée au "rayon" de l'univers (c'est la fonction de métrique). k est la constante de courbure de l'espace physique et ne peut prendre que l'une des trois valeurs 0, + 1 et - 1.

1.2.2 *PROPRIETES DEDUITES DE LA METRIQUE*

Remarquons d'abord que sous la forme (I,7) et en faisant $k = +1$ et $R(t) = cte$ on obtient la métrique statique d'Einstein tandis que sous la forme (I,6) et en faisant $k = 0$ et $R(t) = e^{At}$ ($A = cte$) on se rapproche de la métrique statique de De Sitter. Adoptons alors l'écriture suivante :

$$ds^2 = - R(t)^2 \left[d\chi^2 + \sigma(\chi)^2 \, (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] + c^2 dt^2 \qquad (I,8)$$

Cette écriture permet d'englober les trois cas ($k = 0, \pm 1$) simplement en posant :

$$\sigma(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{si } k = +1 \\ \chi & \text{si } k = 0 \\ \text{sh}\,\chi & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

Ces modèles ayant été largement étudiés dans la littérature, résumons en un tableau leurs propriétés les plus générales.

	$k = +1$	$k = 0$	$k = -1$
$\sigma(\chi)$	$\sin\chi$	χ	$\text{sh}\,\chi$
type d'espace	elliptique	euclidien $\longrightarrow$ plat	hyperbolique
volume $V_k(\infty)$	$V_{+1}(\infty) = 2\pi^2 R^3$	$V_0(\infty) = \infty$	$V_{-1}(\infty) = \infty$ avec $V_{-1}(\infty) >> V_0(\infty)$
	fermé	ouvert	ouvert
	fini	infini	infini

(I,9)

Des propriétés très importantes déduites de cette métrique sont constituées par les équations des cosmologies.
En effet la métrique (I,6) permet de simplifier les équations du champ (I,1), le tenseur impulsion-énergie conservant la valeur écrite en (I,2) (hypothèse du fluide parfait de pression p et de densité ρ).

$$\frac{f}{c^2} 8\pi p = \frac{-kc^2}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - 2\frac{\ddot{R}}{R} + \Lambda c^2 \qquad (I,10)$$

$$\frac{8}{3}\pi\rho f = \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} \qquad (I,11)$$

L'expression (I,10) ainsi écrite montre qu'il est possible de décrire une distribution matérielle de densité $\rho \neq 0$ même si on choisit $\Lambda = 0$.
(NB = les points désignent les dérivations par rapport au temps).
A partir des équations (I,10) et (I,11) on parvient rapidement à une équation interessante :

(I,11) peut encore s'écrire :

$$8\pi f \rho R^2 = 3 kc^2 R + 3 R\dot{R}^2 - \Lambda c^2 R^3$$

dérivons cette expression par rapport au temps :

$$8\pi f \frac{d}{dt}(\rho R^3) = 3 kc^2 \dot{R} + 3 \dot{R}^3 + 6 R\dot{R}\ddot{R} - 3 \Lambda c^2 \dot{R}R^2$$

$$= -3 R^2 \dot{R} \left| -\frac{kc^2}{R^2} - \frac{\dot{R}}{R^2} - 2\frac{\ddot{R}}{R} + \Lambda c^2 \right|$$

$$= -3 R^2 \dot{R} \times 8\pi p \frac{f}{c^2}$$

Soit encore :

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -3 \dot{R}R^2 \frac{p}{c^2}$$

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3)\frac{dR}{dt} + 3\frac{p}{c^2} R^2 \frac{dR}{dt} = 0$$

Comme $\frac{dR}{dt} \neq 0$ en général, on est conduit à écrire l'équation (I,12) connue encore sous le nom d'équation intégrale première des cosmologies :

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) + 3\, p/c^2\, R^2 = 0 \qquad (I,12)$$

ou encore

$$R^3 \frac{d\rho}{dR} + 3\left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) R^2 = 0 \qquad (I,13)$$

L'intérêt de ces équations réside dans le fait qu'il est possible de sérier les modèles à partir de considérations simples.

- l'univers matériel pour lequel $p = 0$ est tel que $\rho R^3 = cte$.

- si $3\left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) R^2 = cte$ nous avons à faire à un modèle stationnaire et si de plus cette constante est nulle, nous retrouvons le modèle de Hoyle.

- pour décrire un univers proche de la singularité originelle (donc dans un état de très haute condensation) on pourra faire $\rho \neq 0$ (en effet l'univers est alors purement énergétique. Un univers de radiation est décrit par une pression $p = p_r = c^2\rho/3$.

Alors on trouve $\rho R^4 = cte$.

1.2.3 *MODELES DE FRIEDMANN*

A partir de la métrique de Robertson (I,7) et des équations des cosmologies [(I,10) et (I,11)] il est possible de faire une discussion des trois familles de modèles selon que k prend les valeurs $0, \pm 1$. Nous ne reprendrons pas cette étude mais nous pouvons résumer en un tableau dû à TOLMAN les divers types de modèles obtenus selon que :

$k = +1$ —> modèles elliptiques
$k = 0$ —> modèles euclidiens
$k = -1$ —> modèles hyperboliques

En abscisse est porté le temps tandis qu'en ordonnée est porté R(t), "rayon" de l'univers.

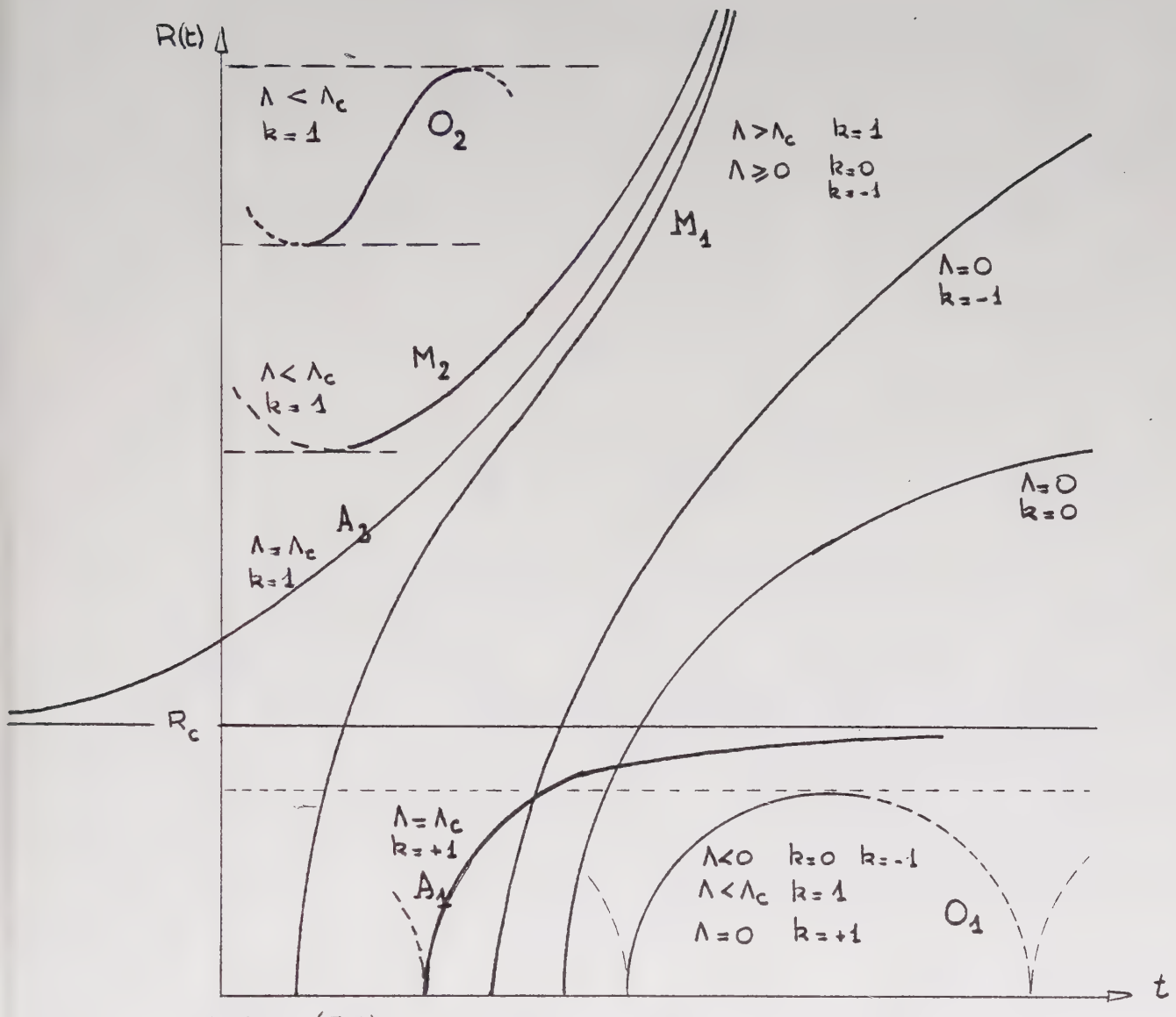


Tableau (I,1)

A côté du sigle attribué à chaque modèle ont été indiqués la valeur du k correspondant et de la constante cosmologique.

La valeur $R_c = 4\pi\ (\rho R^3)$ (tirée de $\Lambda_c = \frac{1}{R_c^2} + 8\pi p$) est valable pour une pression p nulle donc une valeur de ρR^3 cte .

Cette hypothèse $p = 0$ ($\Leftrightarrow \rho R^3 = cte$) est adoptée pour ces modèles et les conséquences d'une telle hypothèse ne sont applicables qu'aux états de l'univers correspondants à l'état actuel.
Remarquons déjà que les modèles de type 2 (A_2, M_2 et O_2) ne sont pas à explosion primordiale.
Dans le cadre de cette étude se situent les modèles dits de Friedmann. Ce sont des modèles non statiques pour lesquels on a émis une double hypothèse, constante cosmologique Λ nulle et pression nulle.
Si $p = 0$ et $\Lambda = 0$, l'équation (I,11) s'écrit :

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3} f\rho R^2 - kc^2$$

soit

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{8\pi f\rho}{3} R^2 - kc^2} \qquad (I,14)$$

mais nous avons vu que $p = 0 \longrightarrow \rho R^3 = cte = A$

donc

$$\sqrt{R}\ \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi Af}{3}} = cte \qquad \text{si } k = 0$$

et

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi fA}{3R} - k} \qquad \text{si } k = +1 \infty -1$$

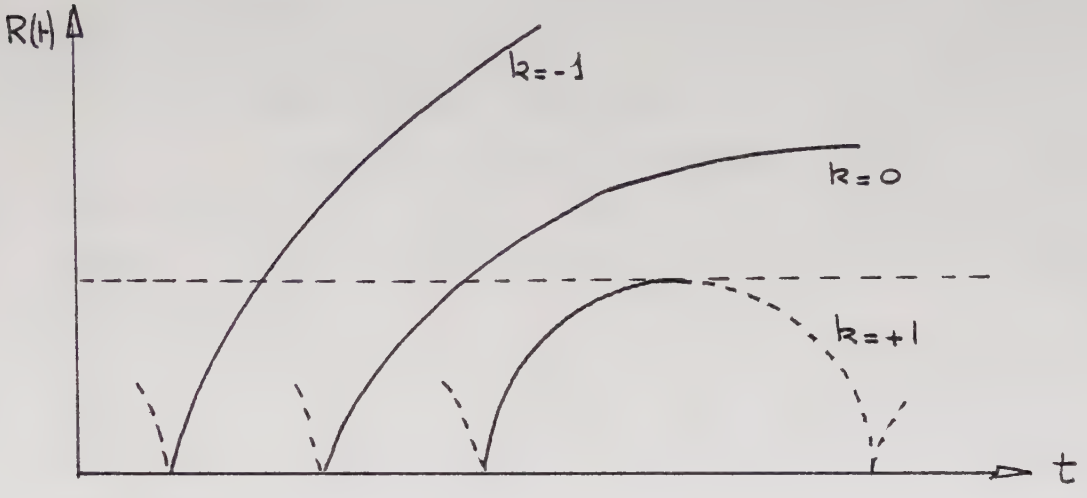
$k = 0$	modèle euclidien	$R(t) = (6\pi fA)^{1/3}\ t^{2/3}$	
$k = +1$	modèle elliptique	$R = a\,(1-\cos\omega)$ $t = a/c(\omega-\sin\omega)$	(I,15)
$k = -1$	modèle hyperbolique	$R = a\,(ch\omega-1)$ $t = a/_c\ (sh\omega-\omega)$	

avec $a = \frac{4\pi fA}{3c^2}$

a est la constante d'échelle

ω est l'angle de développement de l'univers.

On peut remarquer que le cas correspondant à $k = +1$ a une représentation cycloïde dans le schéma $R = f(t)$.



D'autre part, les trois modèles de Friedmann ont des courbes représentatives dont la concavité est toujours tournée vers le bas.
En effet on vérifie que la somme (I,10) + (I,11) donne

$$8\pi f \left(\frac{p}{c^2} + \frac{\rho}{3}\right) = -2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\Lambda c^2}{3}$$

et avec $p = \Lambda = 0$:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3}\rho f < 0 \qquad (I,16)$$

La courbure ayant toujours sa concavité vers le bas, si l'univers est réellement gravitationnel, il doit être en décélération.

Nous allons revenir sur l'intérêt que présentent les modèles de Friedmann compte tenu de ce qui est observé. Signalons auparavant deux modèles intéressants :

- modèles d'Eddington-Lemaître : introduits pour allonger l'échelle de temps qui était trop courte dans les modèles d'Einstein et de De Sitter statiques. Ils servirent surtout a montrer l'instabilité de ces modèles.

- modèle d'Einstein- de Sitter (différent des modèles statiques portant le même nom). La constante de courbure k y est nulle et $\Lambda = 0$ (de plus $p = 0$). Ce modèle a le mérite d'être le plus simple des modèles relativistes non statiques. C'est le modèle de Friedmann de type $k = 0$. On le note EdS.

1.2.4 *ACCORD AVEC LES OBSERVATIONS*

Nous avons décrit les modèles de Friedmann de manière plus détaillée que les autres. Voyons en quoi réside leur simplicité et pourquoi ils correspondent assez bien avec la réalité de l'univers pris dans son ensemble.

Disons tout d'abord que ces modèles ne décrivent pas exactement tout l'univers mais en donnent une bonne description lorsqu'on prend assez de recul pour négliger les amas locaux de matière. D'ailleurs aucun modèle connu ne prétend à une description exacte d'un univers en expansion dont nous connaissons fort peu de choses.

Nous avons vu dans l'introduction quelles étaient les raisons qui nous poussaient à adopter le principe cosmologique. Par la suite nous avons fait avec Friedmann le choix d'une constante cosmologique et d'une pression nulle.
Ces deux hypothèses n'ont qu'un but simplificateur. Pour ce qui est de la constante cosmologique, on sait que si elle n'est pas nulle elle ne doit pas en être très éloignée.

Cette constante cosmologique se retrouve dans la métrique générale de Schwarzschild décrivant un espace temps statique autour d'une masse.

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1+\frac{b}{r}-\frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + \left(1 + \frac{b}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2$$

L'orsqu'on applique cette métrique au système solaire, on ne peut choisir entre cette métrique et le métrique de Schwarzschild

de première espèce pour laquelle Λ est nulle. Nos mesures expérimentales, si elles ne nous permettent pas de faire une discrimination, nous montrent ainsi que la constante cosmologique ne peut avoir qu'une valeur très faible ou nulle.

En ce qui concerne le choix d'une pression nulle, il est bien sûr que l'équation $p = 0$ constitue une excellente équation d'état pour le gaz de galaxies dont nous avons parlé ; gaz sensé représenter assez bien l'univers dans son état actuel.

Après avoir parlé des hypothèses émises et de leur justifications nous pouvons aborder les quelques rares faits expérimentaux qui sont à notre disposition.

Le rayonnement à 3°K est jusqu'à présent interprété comme la radiation relicte d'une explosion qui se serait produite en $t = 0$. Les trois modèles de Friedmann sont en accord avec une telle explosion primordiale comme l'indique les schémas précédents. Nous avons vu que l'idée $p = 0$ entrainait la constance du terme ρR^3 et correspondait à un choix d'univers dit matériel par opposition à un univers empli de radiation pure. Le calcul de la densité de rayonnement (en prenant pour base la température actuelle du rayonnement à 3°K) donne une valeur $\rho_{rad} \simeq 7. 10^{-34}$ g/cm^3. Cette valeur est très nettement négligeable par rapport aux 10^{-30} g/cm^3 qui correspondent à la densité de matière évaluée. Ainsi l'hypothèse $p = 0$ se trouve renforcée.
Il reste à interpréter dans le cadre de ces modèles l'autre grand fait observationnel de la cosmologie à savoir le décalage vers le rouge des spectres pris sur des objets éloignés. Dans la métrique de Robertson (donc pour les modèles de Friedmann) le décalage spectral est assimilé à un effet de vitesse radiale de la source. Ainsi v_r étant cette vitesse, d la distance de l'objet considéré à l'observateur à l'instant t et $R(t)$ étant considéré comme fixé :

$$v_r = \frac{d}{dt}(d) \qquad \text{avec} \quad d = K.\, R(t) \quad (i) \qquad K = \text{cte}$$

$$v_r = K \frac{d\, R(t)}{dt} = K \dot{R}(t) \quad (ii)$$

d'où la relation bien connue obtenue par l'élimination de K entre (i) et (ii) :

$$v_r = H\,d \qquad (I,17)$$

avec

$$H = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \qquad (I,18)$$

Il est bien entendu qu'à l'échelle humaine, $H = \frac{\dot{R}(t_o)}{R(t_o)}$ peut être considérée comme constante.
Les dimensions de H sont alors celles du rapport d'une vitesse à une longueur

$$(H) = \frac{(V)}{(L)}$$ et les unités employées sont donc le $km.s^{-1}.Mpc^{-1}$

H peut donc être associé à une vitesse d'expansion de l'univers. Nous allons donc voir quelle est la vitesse d'expansion des modèles de Friedmann.

1.2.5 *NOTION DE VITESSE D'EXPANSION*

Introduisons au préalable l'idée de paramètre de décélération dérivons (I,18) :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\ddot{R}R - \dot{R}^2}{R^2} = -\frac{\dot{R}^2}{R^2}\left(1 - \frac{\ddot{R}R}{R^2}\right) = -H^2\,(1+q)$$

où q est le paramètre de décélération fonction de t :

$$q(t) = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = -\frac{\ddot{R}}{RH^2} \qquad (I,19)$$

$$\frac{dH}{dt} = -H^2\,(1+q) \qquad (I,20)$$

On constate que $\frac{dH}{dt}$ change de signe lorsque q prend la valeur - 1. Le décalage étant vers le rouge, l'univers est en expansion et donc la fonction $R(t)$ est croissante. Il semble qu'actuellement cette expansion soit en décélération ce qui se traduit par une dérivée première $\dot{R}(t) = \frac{dR(t)}{dt}$ décroissante c'est à dire par une dérivée seconde $\ddot{R}(t)$ négative. Alors, compte tenu de (I,19) il semble que la fonction $q(t)$ doive être positive.

Sachant que $p = \Lambda = 0$, la première équation des cosmologies s'écrit :

$$\frac{kc^2}{R^2} = - \frac{2\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2}$$

mais d'après (I,18) et (I,19) elle prend la forme :

$$\frac{kc^2}{R^2} = 2q\,H^2 - H^2 = H^2\,(2q - 1) \qquad \text{ou encore}$$

$$k = \frac{H^2R^2}{c^2}(2q - 1) \qquad (I,21)$$

Cette équation permet de retrouver les trois modèles de Friedmann :

Si $q > \frac{1}{2}$ alors $k = + 1$

Si $q = \frac{1}{2}$ alors $k = 0$

Si $q < \frac{1}{2}$ alors $k = - 1$

La valeur $q = \frac{1}{2}$ pour le paramètre de décélération revêt une grande importance puisqu'elle constitue la frontière des trois modèles.

A partir de cette valeur nous pouvons passer à l'expression de la vitesse d'expansion.
Par la somme de (I,10) et (I,11), les équations des cosmologies, nous avons obtenu (I,16) :

$$\frac{4\pi}{3} f \rho = - \frac{\ddot{R}}{R} = q\,H^2 \qquad \text{compte tenu de (I,19)}$$

et par suite :

$$H = \left[\frac{4\pi}{3q} \; f.\rho\right]^{1/2}$$

qui n'est autre que la vitesse d'expansion des univers donnés par les modèles de Friedmann.

Ainsi pour $q = \frac{1}{2}$ on a

$$H = \left[\frac{8\pi f}{3} \cdot \rho\right]^{1/2} \qquad (I,22)$$

vitesse d'expansion de l'univers de type euclidien ($k = 0$)

Si $H > \left[\frac{8\pi f}{3} \; \rho\right]^{1/2}$ on a un univers de type hyperbolique ($k = -1$)

Si $H < \left[\frac{8\pi f}{3} \; \rho\right]^{1/2}$ on a un univers de type elliptique ($k = +1$)

Ainsi grâce à cette idée de vitesse d'expansion nous retrouvons l'allure des schémas de la partie 1.2.3. De plus on peut compléter intuitivement ces schémas en pensant que la valeur $H = \left[\frac{8\pi f}{3} \rho\right]^{1/2}$ est une valeur limite. En dessous de la valeur limite on se trouve avec une cycloïde donc avec un univers pulsant.
En dessus de la valeur limite l'univers sera en expansion indéfinie.

Remarquons enfin que lorsqu'on se place juste à la vitesse d'expansion correspondant à $k = 0$, la fonction $R(t)$ a pour valeur

$R(t) = (6\pi fA)^{1/2} . \; t^{2/3}$ et donc $H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \frac{2}{3t}$ fonction qui présente une singularité pour $t = 0$.
Nous reviendrons ultérieurement sur ces propriétés des modèles de Friedmann.

1.3 *UNIVERS INHOMOGENES*

Dans la mesure où on se libère du principe cosmologique, il est possible d'obtenir d'autres modèles d'univers. On abandonne ainsi l'idée d'homogénéité et d'isotropie et donc le principe même d'un fluide parfait homogène.

Alors que nous venons de voir la bonne adaptation des modèles de Friedmann aux observations actuelles on peut se demander s'il y a un intérêt à chercher des modèles plus compliqués. On peut déjà répondre que les modèles de Friedmann décrivent très correctement l'univers considéré comme un fluide homogène, dont les molécules seraient les galaxies mais il apparait nécessaire d'avoir un modèle différent pour décrire l'inhomogénéité elle même (galaxie, super amas de galaxies ...) et son milieu environnant. Deux directions de recherches existent dans ce domaine. Les modèles dans lesquels on introduit la notion de rotation ou celle de distorsion et les modèles dont le fluide représentatif de l'univers n'est ni homogène ni isotrope.

1.3.1 *ROTATION ET DISTORSION*

Dans les modèles déjà étudiés, le seul mouvement que possédait l'univers était l'expansion. Cette expansion se traduit dans l'observation par un décalage spectral vers le rouge et dans le calcul par le terme de Hubble H(t)..

Nous allons introduire les tenseurs $\omega_{\mu\nu}$ et $\sigma_{\mu\nu}$ caractérisant la rotation et la distorsion respectivement ainsi que le scalaire θ caractérisant l'expansion.
Soit un fluide hydrodynamique dont les lignes de courant du genre temps ne se coupent pas. Les coordonnées d'un point sur une ligne de courant sont :

$$x^{\mu} = x^{\mu} \quad (\tau, a_i)$$

où a_i sont les coordonnées lagrangiennes d'un point sur une ligne de courant et

τ est le temps propre le long de cette ligne.

Comme d'habitude, la quadrivitesse est définie par :

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \qquad \text{avec} \qquad u^\mu u_\mu = 1 \text{ (normalisation).}$$

le vecteur accélération est défini par :

$$\gamma^\mu = \frac{Du^\mu}{d\tau} = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$$

(dérivée covariante de u^μ le long d'une ligne de courant)

D'autre part, on introduit le tenseur

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$$

avec $h_{\alpha\beta} u^\alpha = 0$

Alors les tenseurs $\omega_{\mu\nu}$, $\sigma_{\mu\nu}$ et θ sont définis par :

$$\omega_{\mu\nu} = \nabla_{[\nu} u_{\mu]} + u_{[\mu} \gamma_{\nu]} = h_\mu^\rho \, h_\nu^\sigma \, \nabla_{[\sigma} u_{\rho]}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \nabla_{(\nu} u_{\mu)} + u_{(\mu} \gamma_{\nu)} - \frac{1}{3} \theta \, h_{\mu\nu}$$

$$= h_\mu^\rho \, h_\nu^\sigma \, \nabla_{(\sigma} u_{\rho)} - \frac{1}{3} \theta \, h_{\mu\nu}$$

$$\theta = \nabla_\mu u^\mu$$

- les notations $(\mu\nu)$ et $[\mu\nu]$ représentent respectivement les parties symétriques et antisymétriques sachant que :

$$a_{\alpha\beta} = a_{(\alpha\beta)} + a_{[\alpha\beta]} \quad \text{on a :}$$

$$a_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} \left(a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} \right)$$

$$a_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} \left(a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha} \right)$$

- en ce qui concerne les modèles déjà étudiés, notons que pour le modèle d'Einstein les trois tenseurs sont nuls tandis que pour les modèles de Friedmann, seuls $\omega_{\mu\nu}$ et $\sigma_{\mu\nu}$ sont nuls, le scalaire $\theta = \frac{3\dot{R}}{R}$

Au vu de l'écriture de ces tenseurs on réalise bien la complexité qu'ils introduisent dans les calculs. Aussi la description de l'univers à l'aide d'un modèle muni de ces trois tenseurs n'a pas abouti.

Par contre on peut mentionner les modèles de Gödel [3]. Ces modèles décrivent des univers tournants et ne possèdent donc pas de temps cosmique . (L'absence de rotation permet l'introduction d'un temps cosmique c'est à dire l'existence d'un système de 3-espaces à un paramètre partout orthogonaux aux lignes d'univers de la matière).
La métrique est de la forme

$$ds^2 = a^2 \left[(dx^\circ + e^{x^1} dx^2)^2 - (dx^1)^2 - \frac{1}{2} e^{2x^1} (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \right]$$

avec $u^\alpha = (\frac{1}{a}, 0, 0, 0)$ contravariantes et $u_\alpha = (a, 0, ae^{x^1}, 0)$ covariantes

les composantes du vecteur vitesse angulaire

$$\omega^\alpha = \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}}{\sqrt{-g}} \omega_{\beta\gamma} u_\delta$$

ont pour valeur $(0, 0, 0, \sqrt{2}/a^2)$

d'autre part la matière tourne par rapport à un système local d'inertie avec la vitesse angulaire

$$\omega = 2\sqrt{\pi f \rho}$$

Si ce modèle est en accord avec les observations faites sur les galaxies il faut tout de même remarquer qu'il présente la particularité de ne pas

satisfaire le principe de Mach. En effet le principe de Mach exige qu'une telle rotation absolue soit produite par une force extérieure ce qui n'est pas le cas. Ce modèle est donc acausal.

1.3.2 *MODELES INHOMOGENES ET ANISOTROPES*

L'intérêt d'introduire inhomogénéité et anisotropie dans les modèles décrivant l'univers dans son ensemble n'est pas évident puisqu'il a été décidé que l'on adoptait dans ce cas le principe cosmologique. Cependant l'étude de tels modèles devient nécessaire lorsqu'on étudie la stabilité de modèles tels que ceux de Friedmann. En effet la perturbation d'un univers homogène peut le transformer en univers inhomogène. C'est dans ce contexte que se situent les travaux de Hawking et Collins à [4] propos des modèles homogènes perturbés et de l'évolution de ces perturbations.

Nous reviendrons plus en détail sur cette présentation de même que sur un autre intérêt des modèles inhomogènes : le traitement de l'inhomogénéité en elle même (galaxie...). Dans ce domaine nous retrouverons les travaux de A. Einstein et E.G. Strauss [5] sur la vacuole, auxquels on peut associer les "swiss-cheese models" et plus récemment les travaux de S. Mavridès. [6]

Pour clôre ce chapitre mentionnons les essais de E. Schücking et D. Heckmann [7] sur les modèles non isotropes. Ils sont partis de modèles avec $p = 0$, $\Lambda = 0$ et $\omega_{\alpha\beta} = 0$ (pas de torsion), enfin ils n'ont considéré que les modèles homogènes pour lesquels la densité et la distorsion ne dépendent que du temps :

$$\rho = \rho\ (x^o) \qquad\qquad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}\ (x^o)$$

L'intérêt de ce choix est que, à l'aide de la métrique

$$ds^2 = (dx^o)^2 - g_{ij}\ (x^\alpha)\ dx^i\ dx^j$$

il est possible de montrer que le facteur d'expansion n'est pas une fonction isotrope du temps par rapport aux coordonnées d'espace. Ainsi il serait possible d'éviter les singularités ponctuelles qui sont des propriétés des modèles de Friedmann. Ici la métrique de l'univers évolue vers la métrique d'une surface ou d'une ligne mais non d'un point. En fait on a simplement changé la nature de la singularité et l'idée d'anisotropie à grande échelle n'a pas pour l'instant été prouvée sur le rayonnement à 3°K.

Nous reviendrons dans la deuxième partie sur un abord plus simple des inhomogénéités.

2. CLASSIFICATION DES MODELES

Après un aperçu des principaux modèles utilisés nous allons décrire les principales classifications mathématiques que l'on trouve dans la littérature. Après avoir exposé la classification de Petrov nous décrirons une classification des modèles homogènes.

2.1 *CLASSIFICATION INVARIANTE DES CHAMPS DE GRAVITATION*

Lorsqu'on étudie toute théorie des champs et en particulier la théorie de la gravitation d'Einstein il se pose le problème de la classification des champs. Une telle classification doit être liée à l'étude de tenseur des champs donnés.

2.1.1 *CLASSIFICATION DE PETROV* [8], [9]

Les équations du champ d'Einstein sont données par (I,1) et lorsque $\Lambda = 0$ on a :

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - R_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \qquad (I,23)$$

Dans le cas particulier où le tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ est de la forme

$$T_{\mu\nu} = C g_{\mu\nu} \quad \text{scalaire,} \qquad (I,24)$$

les équations du champ (I,23) s'écrivent :

$$R_{\mu\nu} = K g_{\mu\nu} \qquad (I,25)$$

Classifier se ramène à étudier le tenseur de métrique $g_{\mu\nu}$ et le tenseur de courbure $R_{\mu\nu\rho\sigma}$

Soit alors $g_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}$,

tenseur qui, avec $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ présente les particularités :

- le nombre des indices est pair
- les indices sont partagès en paires antisymétriques $\mu\nu$ et $\rho\sigma$

On appellera bitenseur tout tenseur possédant ces deux propriétés et si on adopte la numérotation de Petrov pour les diverses paires possibles, on a :

$\mu\nu$	14	24	34	23	31	12
a	1	2	3	5	5	6

Il y a coorespondance en chaque point de l'espace-temps entre le point et un espace à 6 dimensions.
Dans l'espace à 6 dimensions les tenseurs $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ sont représentés par les tenseurs symétriques R_{ab} et g_{ab} $(a, b = 1,\ldots, 6)$.
Si on prend g_{ab} pour tenseur E_6 nous aurons donné une métrique à l'espace à 6 dimensions. Soit alors la matrice 6×6 donnée par :

$$R_{ab} - K\, g_{ab} \qquad (a, b = 1,.., 6) \qquad (I,26)$$

Le fait de mettre cette matrice sous forme canonique à l'aide de transformations réelles linéaires nous permettra d'obtenir une classification des champs de gravitation.
La mise sous forme canonique obtenue par Petrov conduit aux résultats suivants :

Du point de vue de la structure algébrique du tenseur de de courbure, il existe trois et seulement trois types de champ de gravitation $(R_{\mu\nu} = K\, g_{\mu\nu})$ avec la signature (---- +) ; pour chacun de ces trois types de champs possibles nous pouvons déterminer univoquement un repère orthonormé dans lequel les composantes du tenseur de courbure seront déterminées par la matrice $(R_{ab}) = \begin{vmatrix} M & N \\ N & -M \end{vmatrix}$ où M et N auront l'aspect suivant pour chacun des types possibles :

$$
\begin{array}{lll}
T_1 & M = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \mu_3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} \nu_1 & & \\ & \nu_2 & \\ & & \nu_3 \end{pmatrix} & \Sigma_{\mu_i} = -K \\ & & \Sigma_{\nu_i} = 0 \\
T_2 & M = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2+1 & \\ & & \mu_2-1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 1 \\ 0 & 1 & \nu_2 \end{pmatrix} & \mu_1+2\mu_2 = -K \\ & & \mu_1+2\nu_2 = 0 \\
T_3 & M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \alpha = -\frac{K}{3}
\end{array}
\qquad (I,27)
$$

avec $c_s = \mu_s + i\,\nu_s$ bases des diviseurs élémentaires de la matrice (I,26) et par conséquent sont invariantes par n'importe quelle transformation affine au point considéré de l'espace-temps.
Remarquons que dans les trois cas on a :

$$T_r\, M = -K \qquad \text{et} \qquad T_r\, N = 0$$

Si maintenant nous revenons au <u>cas général</u> pour lequel nous utilisons l'équation (I,23) nous remarquons que la mise sous forme canonique se déroulera de manière analogue au cas particulier.
En effet les formes canoniques précedemment obtenues ne le sont qu'en utilisant les conditions :

$$
\begin{aligned}
& R_{\mu\nu}\,(\rho\sigma) = R_{(\mu\nu)\rho\sigma} = R_{\mu\,[\nu\rho\sigma]} = 0 \\
& R_{\mu\nu} = K\, g_{\mu\nu}
\end{aligned}
\qquad (I,28)
$$

(les paranthèses dénotent la symétrisation des indices tandis que les crochets indiquent l'antisymétisation).
Donc pour n'importe quel tenseur d'ordre 4 vérifiant les conditions (I,28) on peut trouver de façon univoque un tel repère orthonormé pour lequel nous obtiendrons les formes canoniques du cas général.

Pour cela il faut construire un tenseur que Petrov appelle tenseur d'espace - temps - matière noté $P_{\mu\nu\rho\sigma}$ tel que quand on remplace $T_{\mu\nu}$ par $\tau\, g_{\mu\nu}$ on retrouve les valeurs canoniques précédentes.

$P_{\mu\nu\rho\sigma}$ est défini par :

$$P_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + K\left(g_{\mu[\sigma}\, T_{\rho]\nu}\, g_{\mu[\rho}\, T_{\sigma]\mu}\right) + \sigma\, g_{\mu[\sigma}\, T_{\rho]\nu} \qquad (I,29)$$

Ce tenseur est tel que :

(i) il résulte de (I,29) et (I,23) que :

$$P_{(\mu\nu)\rho\sigma} = P_{\mu\nu(\rho\sigma)} = P_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0$$

$$P_{\mu\nu} = P^{\tau}{}_{\mu\tau\nu} = \omega\, g_{\mu\nu} \qquad (I,30)$$

(ii) si on se donne $T_{\mu\nu}$ et $P_{\mu\nu\rho\sigma}$ nous aurons la courbure de l'espace

(iii) si on se donne $g_{\mu\nu}$ et $P_{\mu\nu\rho\sigma}$ nous aurons le tenseur impulsion-énergie

(iiii) si $T_{\mu\nu} = 0$ $\quad P_{\mu\nu\rho\sigma} \Longrightarrow R_{\mu\nu\rho\sigma}$ (tenseur de courbure de l'espace libre)

(iiiii) $P_{\mu\nu\rho\sigma}$ est un bitenseur.

Ainsi le problème et la classification des champs gravitationnels peut être obtenu dans le cas général :

Du point de vue de la structure algébrique du tenseur d'espace - temps - matière, il existe trois et seulement trois types de champs gravitationnels. Pour chacun des trois types de champs possibles on peut définir un repère orthonormé tel que la matrice P_{ab} (a, b = 1,... 6) est définie par la formule (I,27) ou l'on effectue la substitution :

$$R_{ab} \longrightarrow P_{ab} \quad , \quad K \longrightarrow \omega$$

Soit :

$$P_{ab} = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}$$

T_1 $\quad M = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & B_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Sigma A_i = -\omega \\ \Sigma B_i = 0 \end{matrix}$

T_2 $\quad M = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2+1 & \\ & & A_2-1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 1 \\ 0 & 1 & B_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} A_1 + 2A_2 = -\omega \\ B_1 + 2B_2 = \omega \end{matrix}$

T_3 $\quad M = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = -\frac{\omega}{3}$

La liberté dans le choix de σ entraîne que l'on peut toujours rendre ω nul.

2.1.2 *CLASSIFICATION DE PIRANI* [10]

Pirani a proposé une classification calquée sur celle de Petrou mais a utilisé une convention différente. La notation de Pirani étant de plus en plus adoptée il est bon de la mentionner .
Chaque paire antisymétrique est toujours remplacée par un seul indice mais la numérotation est différente :

$\mu\nu$	23	31	12	14	24	34
a	1	2	3	4	5	6

Ainsi $R_{ab} = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}$ est une matrice 6 x 6 représentant le bitenseur de Riemann symétrique et ou les M et N sont les matrices 3 x 3 symétriques.

Soit alors la matrice complexe de trace nulle $R = M + iN$.

Nous avons la classification de Petrov-Pirani :

Type I R admet trois vecteurs propres distincts
les valeurs propres sont distinctes

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & n_2 & \\ & & n_3 \end{pmatrix}$$

Type D (Type I dégénéré encore appelé I_e)
trois vecteurs propres distincts mais deux valeurs propres sont égales $m_2 = m_3$, $n_2 = n_3$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & n_2 & \\ & & n_2 \end{pmatrix}$$

Type II deux vecteurs propres sont distincts, les valeurs propres sont distinctes

$$M = \begin{pmatrix} -2m & & \\ & m+\sigma & \\ & & m-\sigma \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -2n & 0 & 0 \\ 0 & n & \sigma \\ 0 & \sigma & n \end{pmatrix}$$

Type N deux vecteurs propres sont distincts, les valeurs propres sont nulles $m = n = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \sigma & \\ & & -\sigma \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

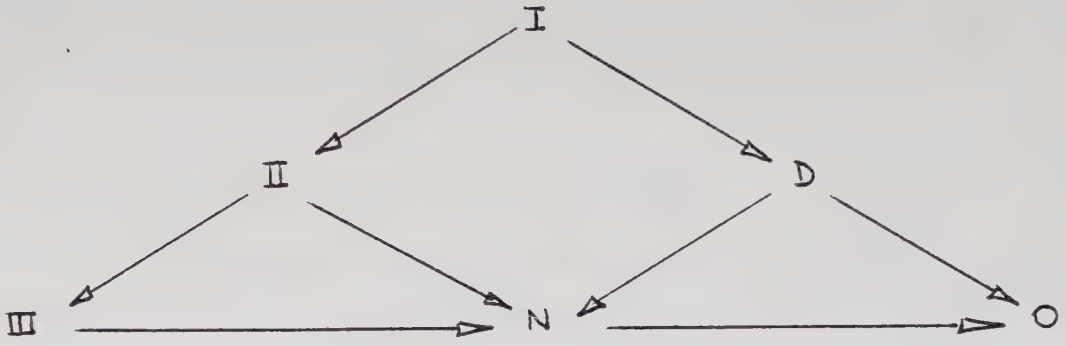
Type III un vecteur propre, la valeur propre est nulle

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma & 0 \\ -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : *le type D est un type I dégénéré mais est aussi un type II avec* $\sigma = 0$

le type N est un cas de II et III.

Dans tous les cas la matrice R est de trace nulle et la somme des valeurs propres sera nulle. Elle admet donc au plus trois vecteurs propres indépendants.
C'est à Penrose que l'on doit une schématisation sous forme de diagramme de ces résultats :



On va de la plus grande généralité avec le type I vers la plus grande spécialisation avec le type O qui correspond à l'espace plat pour lequel $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$.

2.1.3 *CONSEQUENCES*

Le champ gravitationnel d'un système physique isolé est de type I. Toutefois, si le système rayonne, alors à de grandes distances par rapport aux dimensions du système et de la longueur d'onde de la radiation, le champ apparaîtra sensiblement de type N. (Les termes du type N domineront lestermes physiques du tenseur de Riemann). A des distances grandes en comparaison des dimensions du système mais petites par rapport à la longueur d'onde de la radiation, le champ paraîtra être de type III.

Notons, en reprenant la notation de Petrou, que la plupart des solutions connues dans la littérature sont de type T_1. Le plus simple de ces espaces appartenant à T_1 est bien évidemment celui de Minkowski. Dans les espaces T_2 et T_3 le tenseur de courbure est toujours différent de zéro et ainsi ces espaces ne sont jamais plats.

Une classification dans le cas des espaces vides pour lesquels $R_{\mu\nu} = 0$ a été donnée par Petrov. Elle donne dans un tableau l'ordre du groupe auquel appartient la métrique selon le type de Petrov considéré.
Bien sûr ce type d'espace est très limitatif mais une étude générale complique passablement le problème qui se réduit à la détermination des variétés riemanniennes V_4 admettant un groupe de mouvements donné.

2.2 *UNE CLASSIFICATION DES MODELES HOMOGENES*

On considère les équations du champ d'Einstein en faisant les hypothèses suivantes : l'origine du champ gravitaionnel est un fluide parfait et il existe un groupe de mouvement simplement transitif sur des surfaces tri-dimensionnelles orthogonales au vecteur flux du fluide. A partir de ces données il est possible de faire une classification.
La classification a été donnée pour la première fois par Bianchi (1897) (11) puis successivement modifiée par Taub (1951) (12) et Behr (1968) (13) tandis que Ellis et Mac Callum (1969) (14) lui ont donné les "dernières retouches".
Notons que Taub a plus spécialement étudié le cas $p = \rho = 0$ tandis qu'une étude de Schücking portait plutôt pour le cas $p = 0 \neq \rho$.

Le formalisme est basé sur des résultats de géométrie qui proviennent de Lie, Ricci, Bianchi, Fubini et Cartan. On utilise les coordonnées gausiennes basées sur la famille d'hypersurfaces homogènes et on introduit un repère de base de trois champs de vecteurs linéairement indépendants $\vec{e}^a$ dans chaque hypersurfaces. Ces champs de vecteurs ont les propriétés suivantes :

- leurs produits internes, γ^{ab} (a, b = 1, 2, 3) sont constants à l'intérieur de toute hypersurface donnée.
- ils ont des dérivées de Lie qui "s'évanouissent" par rapport au champ vecteur normal aux hypersurfaces.
- un repère de structures constantes C^a_{bc} caractérise algébriquement le groupe de mouvements.

La forme fondamentale des espaces tri-dimensionnels devient alors :

$$d\sigma^2 = \gamma_{ab} \vec{e}^{\,a} . d\vec{x} \vec{e}^{\,b} . d\vec{x}$$ et pour l'espace-temps on a :

$$ds^2 = d\sigma^2 - dt^2$$

de plus on a $\gamma_{ab} = (\gamma^{ab})^{-1}$ - la matrice γ_{ab} est formée des produits internes de la base duale $\vec{e}_a$

En accord avec l'analyse de Bianchi des groupes de Lie à trois paramètres, il y a 9 types d'espaces à 3 dimensions non équivalents algébriquement admettant un groupe de mouvement simplement transitif. Dans chacun de ces types les γ^{ab} sont arbitraires tandis que les C^a_{bc} sont déterminés à une transformation affine constante non singulière près. Les équations du champ d'Einstein donnent dans le cas le plus général un système très compliqué de six équations différentielles ordinaires couplées du second ordre pour les γ^{ab} fonctions uniquement de la coordonnée de temps t qui détermine les hypersurfaces.
La classification de Bianchi-Behr est obtenue à partir de

$$A^{il} = \frac{1}{2} C^i_{jk} \Sigma^{jkl}$$

le rang et la valeur absolue de la signature de $A^{(il)}$ sont invariants sous une transformation affine constante. Par ce critère on peut distinguer dix types non équivalents.

Considérant les identités de Jacobi :

$$C^a_{[bc]} = C^a_{bc} \qquad (i)$$

et $$C^a_{[bc} C^d_{e]a} = 0 \qquad (ii)$$

D'après Ellis et Mac Callum il est possible de décomposer C^a_{bc} en deux parties :

un tenseur contrevariant symétrique n^{ab} et un vecteur covariant a_b

$$C^a_{bc} = \varepsilon_{dbc}\, n^{ab} + \delta^a_{cab} - \delta^a_{bac}$$

où $\quad a_b = \frac{1}{2} C^a_{ba} \quad ; \quad n^{ab} = \frac{1}{2} C^{(a}_{cd}\, \varepsilon^{b)cd}$

l'identité de Jacobi donne alors :

$$n^{ab}\, a_b = 0 \qquad (I,31)$$

la classification se ramène donc à trouver les ensembles $\{n^{ab}, a_b\}$ solutions de (I,31) qui ne sont pas équivalents par un changement de base. D'après (I,31), si $a_b \neq 0$, le vecteur covariant a_b doit être vecteur propre de la matrice n^{ab} associé à la valeur propre zéro. Ainsi les classes A et 0 suivantes vont correspondre respectivement aux cas $a_b = 0$ et $a_b \neq 0$

Alors n^{ab} peut être mis sous la forme :

$$n^{ab} = \begin{pmatrix} n_1 & a & 0 \\ -a & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix}$$

A partir de ces résultats on donne le tableau de classification modifié par Behr dans lequel on mentionne les anciennes notations de Bianchi. De plus la dimension de chaque sous variété est indiquée ainsi que le signe de a.

Rappel du type de Bianchi	Classe type		valeurs propres de n^{ab} a	n_1	n_2	n_3	Dimension	Espace Contenu
I	A	I	0	0	0	0	0	FRW k = 0 (EdS)
II		II	0	+	0	0	3	
VII		VII_o	0	+	+	0	5	FRW k = 0 (EdS)
VI		VI_o	0	+	−	0	5	
IX		IX	0	+	+	+	6	FRW k = + 1
VIII		VIII	0	+	+	−	6	
V	B	V	+	0	0	0	3	FRW k = − 1
IV		IV	+	0	0	+	5	
VII		VII_h	+	0	+	+	6	
VI, III		VI_h	+	0	+	−	6	FRW k = − 1

Tableau classification des modèles homogènes en dix classes d'équivalence 1.2.1

Dans la colonne située à l'extrême droite sont indiqués les modèles de Friedmann.
La limite de chaque sous-variété est formée par les sous-variétés correspondant aux classes d'équivalence de dimension inférieure.

On constate que les types VI_h, VII_h, VIII et IX on la plus grande dimension. Ceci signifie que tout ouvert dans l'espace des données initiales qui coupe le sous espace des données homogènes doit couper finalement un de ces quatre types au moins.
Remarquons que Taub a associé les types IX et VIII au modèle de Gödel. Ainsi cette classification contient les modèles de Friedmann et par suite englobe aussi le modèle statique d'Einstein.

Donnons enfin un diagramme de spécialisation proposé par Mac Callum (1971) [15] dans lequel une flèche se dirigeant d'une classe d'équivalence vers une autre indique que la seconde est contenue dans la frontière de la première :
(la dimension de la classe est rappelée).

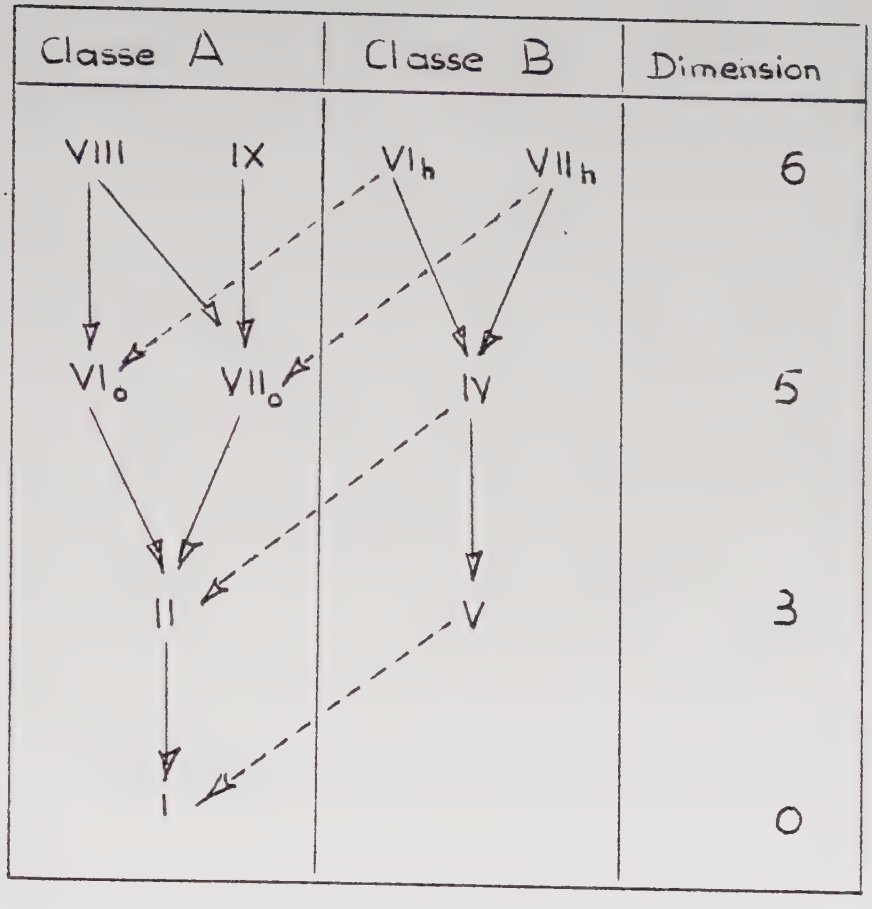


Tableau (I.2.2)

Les flèches en tirets ont la même signification que les flèches pleines mais indiquent en plus qu'il y a changement de classe.

Nous verrons dans la deuxième partie comment cette classification a permis de dégager des conclusions sur l'isotropie des modèles d'univers.

2ème PARTIE

INHOMOGENEITES - ANISOTROPIE

1. INTRODUCTION - ISOTROPIE ET HOMOGENEITE

1.1 *INTRODUCTION*

Lorsqu'on se pose le problème de l'évolution de l'univers dans le temps, la notion d'inhomogénéité surgit rapidement. Nous avons vu que ces inhomogénéités se caractérisent essentiellement en des amas de matière. Il va donc exister une différence de densité entre la condensation de matière et le milieu extérieur. D'où la nécessité de trouver des solutions de raccordement entre ces zones de densité inégale.

Ces inhomogénéités observées, au temps actuel, sur l'échantillon d'univers qui nous est accessible, ont dû se former et doivent évoluer au cours du temps. Ce sont ces deux points de vue qui nous intéressent lorsqu'on aborde les modèles d'univers inhomogènes. Nous constatons actuellement que les modèles de Friedmenn, compte tenu des observations semblent convenir à l'univers où nous nous trouvons. Aussi c'est à partir de petites perturbations de ces modèles que l'on aborde généralement les inhomogénéités.

En ce qui concerne la formation des inhomogénéités, (et plus particulièrement des galaxies) il est théoriquement possible de résoudre la question de façon expérimentale. Toutefois si les plus grands télescopes actuels "atteignent" 6 ou 7 milliards d'Années-lumière ils sont encore loin des 9 milliards où l'on pense "voir" la formation des galaxies. Aussi en est-on réduit aux hypothèses. Pour ce qui est de l'évolution dans le temps le problème est "encore plus simple" puisque on ne peut évidemment l'aborder que de manière théorique.
Il est bien entendu que lorsqu'on parle d'inhomogénéités, il s'agit d'inhomogénéités à petite échelle (galaxie, amas de galaxies). Il ne saurait être question ici d'aborder une étude d'inhomogénéité de l'univers considéré dans son ensemble. D'ailleurs le rayonnement à 3°K vient nous rappeler, par sa parfaite isotropie, qu'il serait inutile d'engager une telle étude.

Si la notion d'homogénéité est physiquement très accessible, il est peut être bon de rappeler ce que signifie l'isotropie. Ces deux notions sont en effet intimement liées dans le problème qui nous interesse. On montre d'ailleurs (*Cf. "Gravitation"*) que l'isotropie entraîne (pour ce qui est de l'univers) l'homogénéité.

1.2 *NOTIONS SUR L'ISOTROPIE*

Au sens général du terme, une grandeur physique (macroscopique ou microscopique) est anisotrope ou isotrope selon qu'elle dépend où non de la direction selon laquelle on la mesure. Ainsi, la densité d'un corps homogène ou la fonction de distribution des vitesses à l'équilibre thermodynamique sont des grandeurs isotropes, tandis que cette même fonction en régime de transport est anisotrope. Dans cette acception générale, le temps et l'espace étant des grandeurs physiques (physiques puisque mesurables) on parle souvent de leur isotropie ou de leur anisotropie. Si ceci s'applique parfaitement à une physique classique, il faut faire de nombreuses nuances en ce qui concerne la physique relativiste.

L'espace (au sens classique du terme) est en général considéré comme isotrope. En physique quantique, cette isotropie se manifeste par l'invariance du carré du module de la fonction d'onde d'un système isolé par rapport à l'inversion spatiale ce qui permet d'attribuer à chaque particule élémentaire une "parité" bien définie et en assure la conservation. (Mentionnons l'exception que constitue la non conservation de la parité ou asymétrie de l'espace par rapport à la réflexion dans un miroir pour ce qui est des interactions faibles. *Lee-Yang 1956*).

Parler d'isotropie de l'espace en cosmologie (et en physique relativiste d'une façon générale) n'a de sens que si on parle aussi d'isotropie du temps. Or, comment définir de manière simple l'isotropie du temps ?

Remarquons ici qu'on entend parfois parler d'isotropie du temps à l'échelle atomique, c'est à dire que les équations du mouvement classique

(Newton) ou quantiques (E. Schrödinger, W.K. Heisenberg) sont invariantes sous une inversion temporelle - changement de t en $-t$. Une conséquence immédiate est la "reversibilité macroscopique" à savoir l'égale probabilité d'une transition $(i \to f)$ et de son inverse $(f \to i)$ entre deux états quelconques f et i. Mais est-ce réellement de l'isotropie?].
Aussi en cosmologie relativiste où la dépendance des coordonnées d'espace et de la coordonnée de temps apparaît dans les équations on émet un principe. Ce principe relatif à l'isotropie est le principe cosmologique dont il a été question dans l'introduction.
Nous partons donc du fait qu'un espace rempli uniformément de matière est quant à ses propriétés tout à fait uniforme et isotrope.
Cela signifie qu'on peut choisir un temps "universel" tel qu'à chaque instant la métrique de l'espace soit identique en tout point et dans toutes les directions.
Si nous considérons le tenseur de métrique tridimensionnel $g_{\mu\nu}$ nous aurons un élément de distance spatiale de la forme

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad (II,1)$$

le tenseur de courbure désigné par $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ doit dans le cas de l'isotropie complète s'exprimer uniquement en fonction du tenseur de métrique $g_{\alpha\beta}$ et compte tenu des propriétés de symétrie on a :

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = C\,(\delta^\alpha{}_\gamma\, g_{\delta\beta} - \delta^\alpha{}_\delta\, g_{\gamma\beta}) \qquad (II,2)$$

où C est une constante.
Le tenseur du second ordre $R_{\alpha\beta} = R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}$ est alors égal à

$$R_{\alpha\beta} = 2\,C\,g_{\alpha\beta}$$

ce qui entraine que la courbure scalaire $R = 6\,C$.
En passant à la métrique spatio-temporelle pour le type isotrope il faut convenir du choix d'un référentiel. On prend un référentiel en comouvement

avec la matière c'est à dire que la vitesse de la matière dans ce référentiel est, par définition, partout nulle. Il est alors nécessaire de choisir la coordonnée temporelle en tenant compte des précisions mentionnées ci-dessus : la métrique doit être identique dans tout l'espace à chaque instant. Etant donnée l'équivalence complète de toutes les directions, les composantes $g_{4\alpha}$ $(\alpha \neq 4)$ du tensur de métrique sont nulles dans le référentiel choisi.

Alors on a $ds^2 = g_{44}\, dx_4^2 - d\sigma^2$

la composante g_{44} est ici seulement fonction de x^4. On peut donc toujours choisir la coordonnées temporelle de manière que g_{44} devienne c^2. On a convenu d'appeler x^4 le temps soit t. La métrique dans le cas de l'isotropie est donc :

$$ds^2 = - g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu + c^2\, dt^2 \qquad (II,3)$$

Ainsi nous avons vu quelles nuances se glissaient dans la définition de l'isotropie en cosmologie et nous en avons donné une définition. Cette isotropie est confirmée par le rayonnement à $3°K$ dont on réalise bien la dépendance spatiale et temporelle. (NB : l'isotropie pourrait d'une certaine façon être mise en défaut par la découverte de décalages spectraux anormaux : quasars ...).

2. ISOTROPIE DE L'UNIVERS A GRANDE ECHELLE

2.1 *POSITION DU PROBLEME*

Si nous considérons le Big Bang que nous pouvons imaginer comme étant un état supercondensé dominé par le rayonnement, on peut se demander comment ont pu naître les inhomogénéités. En effet considérant un univers formé uniquement de rayonnement (avec une pression non nulle : $p = \rho c^2/3$) et évoluant peu à peu vers un univers de type matière ($p = 0$), la création de l'inhomogénéité constitue dans un tel univers une véritable charnière Misner (16) a suggéré que l'univers débutait dans un état chaotique avec des inhomogénéités et de l'anisotropie et que divers procédés dissipatifs effaçaient tout de telle sorte que nous observons les petites valeurs actuelles. En guise d'explication de ces procédés dissipatifs diverses hypothèses ont été proprosées comme la viscosité des neutrinos (17) et la création par paires (18). Toutefois aucune de ces idées n'a fait l'unanimité.

La façon la plus commune d'aborder le problème est d'étudier la naissance de petites perturbations dans le contexte d'un modèle de Robertson-Walker. Dans la littérature on trouve deux groupes distincts:

- celui constitué par les perturbations inhomogènes. Elles ont été étudiées par Sachs et Wolf (19) et par Rees et Sciama (20).De telles perturbations produiraient une anisotropie à petite échelle dans le rayonnement relicte. Ce rayonnement étant assez hautement isotrope de telles anisotropies peuvent être négligées aussi n'en parlerons nous pas.
- celui constitué par les perturbations homogènes et anisotropes principalement étudié par Collins et Hawking (4). Ce sont les conséquences de ces petites perturbations que nous allons essayer de détailler en fonction du groupe de symétrie auquel elles appartiennent. Ces groupes ont été explicités dans la première partie.

2.2 *PERTURBATIONS HOMOGENES ET ANISOTROPES*

Il est possible de séparer les perturbations spatialement homogènes et anisotropes en diverses classes en accord avec le type de symétrie qu'elles possèdent. Ces groupes définis dans la première partie en (2.2) sont résumés dans les tableaux (I,21) et (I,22).

Prenant en compte de telles perturbations, on aimerait savoir si, dans l'espace de toutes les données initiales nécessaires à la formation d'inhomogénéités (avec une topologie convenable), il y a un ouvert qui donne naissance à des modèles cosmologiques qui approchent l'isotropie et l'homogénéité lorsque le temps croît. En d'autres termes on voudrait savoir si la classe des données initiales qui produisent des univers approximativement homogènes et isotropes est de mesure non nulle. Collins et Hawking (4) ont montré qu'il n'existe pas d'ouvert de cette espèce. Ceci montre que les modèles de Robertson-Walker sont instables et que chaque voisinage ouvert des données initiales de Robertson- Walker contient des données qui ne conduisent pas à l'isotropie.

On peut alors imaginer décomposer les perturbations générales d'un modèle de Robertson-Walker en modes normaux. Il y aurait un nombre infini de modes correspondant à des perturbations inhomogènes et un nombre fini correspondant à des perturbations homogènes mais anisotropes. Pour montrer que le modèle de Robertson-Walker est instable, il suffit de montrer qu'il existe à la fin un mode normal qui ne disparaît pas. On est conduit à montrer l'existence d'un mode homogène dont l'amplitude croît avec le temps. Dans les instants les plus jeunes de l'univers, l'amplitude de ce mode peut être réduite par la viscosité mais comme l'univers s'étend, de tels procédés dissipatifs deviennent négligeables comparés avec les champs gravitationnels à grande portée. Ceci impose à l'amplitude du mode de grandir. Encore faut-il qu'il ait le temps de grandir comme nous allons le voir.

D'après les calculs exposés dans (4) il ressort que seuls les types de Bianchi-Behr admettant les modèles de Robertson-Walker peuvent tendre vers l'isotropie lorsque t tend vers l'infini. Or, considérant que nous sommes dans un stade isotrope, nous pouvons conserver uniquement les modèles I, VII_o, IX, V et VII_h. De ces cinq modèles, seuls deux : IX et VII_h ont la dimension maximum 6.
De plus tous les modèles de type IX semblent devoir collapser au bout d'un temps fini (21).
Il semble que les parturbations évoluent dans le temps de la façon suivante :

Pour $k = 0$ (modèle parabolique) les deux perturbations correspondantes I et VII_o disparaissent lorsque t devient arbitrairement grand.

Pour $k = +1$ (modèle elliptique-fermé) les perturbations du type IX décroissent en amplitude jusqu'à ce que le modèle atteigne son rayon maximum avant de commencer le collapse.

Pour $k = -1$ (modèle hyperbolique) les perturbations du type V disparaissent toutes avec le temps mais quelques unes de type VII_h "passent" dans les périodes les plus avancées ($t \to +\infty$) de l'expansion quand la densité de matière devient si faible qu'elle n'est plus dynamiquement importante.

Il est toujours possible de se demander pourquoi l'univers est aussi isotrope actuellement. Avec Collins et Hawking on peut faire le raisonnement suivant :

- si l'univers était en expansion avec une vitesse plus importante que la vitesse critique ($H_c = \left[\frac{8\pi f \rho}{3c^2}\right]^{1/2}$. *Cf* . I.1.2.5) la matière serait devenue dynamiquement insignifiante à un stade primitif et il y aurait eu suffisament de temps pour que les perturbations anisotropes deviennent grandes.

- si l'expansion avait été plus faible, il y aurait eu collapse avant d'atteindre le rayon actuel et le temps n'aurait pas été suffisant pour que l'isotropie soit amortie.
- donc l'explication de l'isotropie actuelle de l'univers est que le taux d'expansion est presque égal à la valeur critique H_c requise pour éviter le collapse.

En d'autres termes on a :

$$\rho \text{ presque égal à } \frac{3c^2 H^2}{8\pi f} \qquad (II,4)$$

La densité de matière lumineuse observée satisfait cette relation d'un facteur 100 près par défaut et peut être corrigée en ajoutant gaz intergalactique, neutrinos et trois noirs.

Résumons ces résultats en un tableau :

	$q = 1/2$ perturbation de type I et VII_o Univers de type k = 0 (EdS)	
$q > \frac{1}{2}$ $H < H_c$ FRW : k = + 1 perturbation de type : IX	$q < \frac{1}{2}$ $H > H_c$ FRW : k = - 1 perturbation de type : V et VII_h	$H = \left(\frac{4\pi}{3qc^2} f.\rho\right)^{1/2}$
0	$H_c = \left(\frac{8\pi f\rho}{3c^2}\right)^{1/2}$	

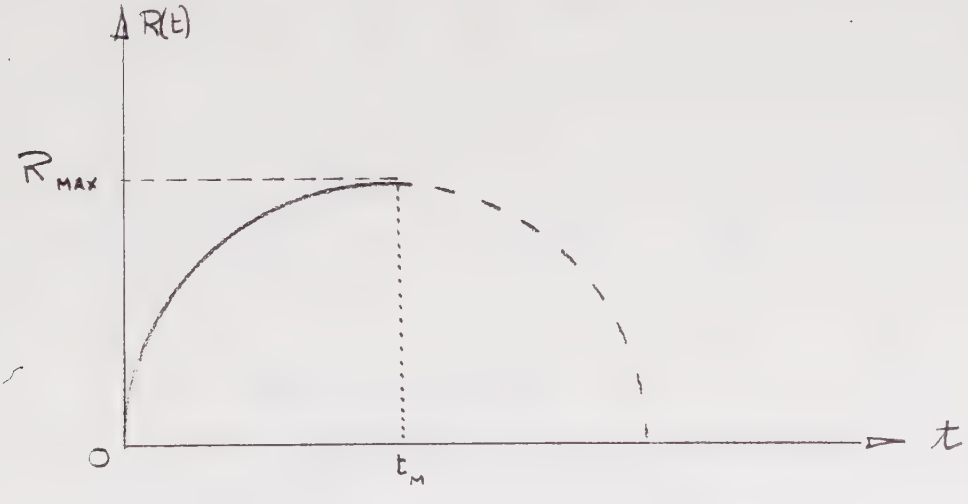
2.3 *DISCUSSION*

Ces résultats très séduisants appellent quelques remarques :

Tout d'abord nous ne sommes qu'à un instant t fini du big bang. Il est donc possible que des modes inhomogènes apparaissent lorsque t devient arbitrairement grand (cas du modèle de perturbation VII_h).

De même, avant d'atteindre l'isotropie définitive, il est possible que l'univers passe par des états intermédiaires d'isotropie suivis d'anisotropie. Il serait tout de même dommage que l'univers si isotrope actuellement soit destiné à devenir anisotrope.

Remarquons ensuite que de telles hypothèses sur la vitesse critique d'expansion semblent devoir éliminer les modèles de type O_1 (en ce qui concerne la notation de la première partie) ou modèles elliptiques ($k = +1$ et type IX correspondant). Bien que ces modèles semblent devoir recollapser en un temps fini nous n'avons pas d'information sur le temps d'évolution. Rappelons le diagramme correspondant à ces modèles :



Entre le "rayon 0" et le rayon maximum de tels univers, il s'écoule un temps t fini et dans certaines conditions ce temps devrait être suffisant pour que s'amortissent les perturbations. Il apparaît tout de même dans (4) que ces modèles n'approchent pas l'isotropie lorsque t croît.

3 EVOLUTION DES MODELES COSMOLOGIQUES INHOMOGENES

L'univers tel qu'il est observé actuellement peut-il être le produit d'une évolution à partir de multiples états possibles ou bien comme il est mentionné dans le chapitre précédent n'y a-t-il qu'un petit lot d'univers dont l'évolution conduit au stade présent?
En considérant le cas de la symétrie sphérique, il est possible de parvenir à des résultats. D'autre part nous indiquerons quels sont les inconvénients dûs à l'introduction de la symétrie sphérique et nous mentionnerons de nouvelles voies qui permettent de s'en affranchir.

3.1 *LES MODELES A SYMETRIE SPHERIQUE*

Collins et Hawking (4) n'ont considéré que les modèles homogènes tout en faisant une remarque sur leurs travaux : "... (le travail) ne prouve pas qu'il ne puisse exister un ouvert de données initiales inhomogènes qui donne naissance à des modèles qui approchent l'homogénéité et l'isotropie ... toutefois il semble improbable que des inhomogénéités produisent de l'isotropie plutôt que de l'anisotropie". Cette idée n'est donc qu'une argumentation de bon sens et il est naturel de se demander si l'univers est aussi "logique" que nous l'imaginons.

Considérons donc un fluide relativiste de "poussière" décrit par les équations générales du champ (I,1) avec une constante cosmologique nulle ($\Lambda = 0$). Nous utiliserons comme solutions des équations d'Einstein celles proposées par Tolman.

3.1.1 *SOLUTION DE TOLMAN*

En utilisant un système de coordonnées en co-mouvement avec la matière on a :

$$\frac{dx^{\mu}}{ds} = 0$$

Pour un tel univers sans pression et bien sûr sans gradient de pression et conservant l'hypothèse de symétrie sphérique la métrique prend la forme

$$ds^2 = - e^{\mu}\, dr^2 - R^2\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + dt^2 \qquad (II,5)$$

μ et R étant des fonctions de r et t.
La vitesse des particules du fluide est

$$u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{dt} = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$$

Les hypothèses utilisées (pression nulle ....) conduisent à une expression simplifiée du tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$.

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}{\partial x^1_o \partial x^1_o}\ p + \frac{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}{\partial x^2_o \partial x^2_o}\ p + \frac{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}{\partial x^3_o \partial x^3_o}\ p + \frac{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}{\partial x^4_o \partial x^4_o}\ \rho$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}{\partial t\ \partial t}\ \rho \qquad (p = 0 \quad \text{et} \quad x^4_o = t)$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial t} \cdot \frac{\partial x^{\nu}}{\partial t} \cdot \rho = u^{\mu} \cdot u^{\nu} \cdot \rho$$

ρ étant la densité du fluide mesurée dans un système de coordonnées, comobile avec le fluide donc :

$$T_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{si} \quad \mu \neq \nu$$

$$T_{\mu\mu} = 0 \qquad \text{si} \quad \mu \neq 4$$

et par suite seule la composante $T_{44} = \rho$ est non nulle.

Des équations du champ on déduit :

$$\left\{\begin{array}{ll}
(1) & 1 - e^{-\mu} R'^2 + 2\ddot{R}R + \dot{R}^2 - \Lambda R^2 = 8\pi p = 8\pi\, T_1^1 = 0 \\
(2) & - e^{-\mu} \left(\frac{2R''-\mu'R'}{2R}\right) + \frac{2\ddot{R} + \dot{\mu}\dot{R}}{2R} + \frac{\ddot{\mu}}{4} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} - \Lambda = 8\pi\, T_2^2 = 8\pi\, T_3^3 = 0 \\
(3) & \frac{1}{R^2}\left[1 - e^{-\mu}(2RR'' + R'^2 - \mu' RR') + \dot{R}^2 + \dot{\mu}R\dot{R} - \Lambda R^2\right] = 8\pi\rho = 8\pi\, T_4^4 \\
(4) & 8\pi\, e^{\mu}\, T_4^1 = - 8\pi\, T_1^4 = - \dot{\mu}\,\frac{R'}{R} + 2\,\frac{\dot{R}'}{R} = 0
\end{array}\right.$$

Les points désignent les dérivations par rapport à la variable t et les accents par rapport à la variable r.
De l'équation (4) on tire :

$$\dot{\mu} = 2\,\frac{\dot{R}'}{R'} \qquad \text{soit} \qquad \mu = \log\left(\frac{R'^2}{\underline{cte}}\right)$$

Soit f(r) la constante par rapport au temps. Notons qu'elle est nécessairement positive

$$f(r) > 0 \qquad (II,6)$$

alors on a :

$$e^{\mu} = \frac{R'^2}{f(r)} \qquad (II,7)$$

La métrique (II,5) est déterminée :

$$ds^2 = - \frac{R'^2}{f(r)}\, dr^2 - R^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + dt^2 \qquad (II,8)$$

En reportant la valeur de e^{μ} dans (1) on obtient après quelques transformations :

$$2R\dot{R}^2 + 2R\left[1 - f(r)\right] = F(r) \qquad (II,9)$$

où $F(r)$ est une constante d'intégration arbitraire de classe C^2. On aurait obtenu un résultat identique en substituant dans (2).

Par contre en substituant dans (4) on trouve la valeur de la densité de matière :

$$8\pi\rho = \frac{F'(r)}{2R'R^2} - \frac{f'(r)}{RR'} \qquad (II,10)$$

Remarquons que les solutions données par (II,8) dépendent de $f(r)$. Il va se dégager trois cas selon que $f(r)$ est supérieur, égal ou inférieur à 1.

3.1.2 *SOLUTION POUR $f(r) = 1$.*

C'est le cas le plus simple. En effet la métrique s'écrit

$$ds^2 = - R'^2\, dr^2 - R^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + dt^2 \qquad (II,11)$$

nous avons à faire à un espace plat ou parabolique.

(i) $e^{\mu} = R'^2$ soit $e^{\mu/2} = R'$ ou encore $R = \int_0^r e^{\mu/2} dr$

C'est dire que R est la distance (à $t = c^{te}$) du point considéré à l'origine $r = 0$. L'aire de la sphère $r = c^{te}$ est égale à $4\pi R^2$ et par conséquent R peut être considéré comme rayon de la sphère $r = c^{te}$.

Alors $\dot{R}$ est la vitesse radiale de la matière.

$$f(r) = 1 \quad \rightarrow \quad (\dot{R} \quad \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad R \quad \rightarrow \infty)$$

(ii) (II,9) devient : $\dot{R}^2 = \frac{F(r)}{2R}$

soit après intégration :

$$R = \left[\frac{9}{8}\, F(r)\right]^{1/2} \cdot \left[t - \beta(r)\right]^{2/3} \qquad (II,12)$$

où $\beta(r)$ est une fonction arbitraire.

Si nous supposons que le modèle ne contient pas de région vide alors on a partout $\rho > 0$. Comme d'autre part $R' \neq 0$ (sans cela $g_{\mu\mu} = 0$) alors d'après (II,10) :

$$F'(r) > 0 \qquad (r > 0) \qquad \text{(II,13)}$$

Notons l'importance physique de la condition $\rho > 0$ qui impose l'absence de "trou" dans le modèle.
Nous pouvons alors avec Bonnor (23) faire le changement de variable suivant :

$$\bar{r} = \left[\frac{9}{8} F(r) \right]^{1/3} \qquad \text{soit} \qquad F(r) = \frac{8}{9} \bar{r}^3$$

Alors (II,12) :

$$R(\bar{r},t) = \bar{r} \left[t - \beta(\bar{r}) \right]^{2/3}$$

et (II,10) s'écrit :

$$ds^2 = - (t - \beta(\bar{r}))^{4/3} \left\{ y^2 \, d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 \, d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right\} + dt^2$$

$$\text{avec} \quad y = 1 + \frac{2 \bar{r} \beta'(\bar{r})}{3(t - \beta(\bar{r}))}$$

la densité est donnée par

$$8\pi\rho = \frac{4}{3\left[t - \beta(\bar{r})\right]^2 y} \qquad \text{(II,14)}$$

si on fait tendre t vers l'infini, (II,14) devient :

$$8\pi\rho = 4(3t^2)^{-1} + 0\,(t^{-3})$$

qui montre que ρ approche de sa valeur dans le modèle EdS dans tous les cas.

Donc un modèle de Tolman en expansion avec $f(r) = 1$ et une densité non nulle en tout point évolue nécessairement vers un modèle homogène de Friedmann $(k = 0)$ quelles que soient les conditions initiales.

3.1.3 *SOLUTION POUR $f(r) > 1$*

La solution de (II,8) et (II,9) peut s'écrire

$$R = \frac{F}{4} \left[f - 1\right]^{-1} . \left[\text{ch } u - 1\right]$$

$$t - \beta(r) = \frac{F}{4} \left[f - 1\right]^{-3/2} . \left[\text{sh } u - u\right] \qquad \text{(i)}$$

d'autre part, la densité est donnée par :

$$8\pi\rho = 2F'F^{-2} \left[f - 1\right]^2 (R')^{-1} \text{cosech}^4 \frac{1}{2} u$$

avec $\beta(r)$ toujours considérée comme fonction d'intégration de classe C^2.

Bien sûr le modèle hyperbolique de Robertson- Walker correspondant peut être obtenu en faisant les changements de variables suivants :

$$f = 1 + r^2$$

$$F = 4 a r^3$$

$$\beta(r) = 0$$

où a est une constante arbitraire positive telle que

$$R = ar (\text{ch } u - 1)$$

$$t = a (\text{sh } u - u)$$

$$8\pi\rho = \frac{3}{4} a^{-2} \text{cosech}^6 \frac{1}{2} u$$

Lorsque on envisage les modèles inhomogènes décrits par (i) des singularités apparaissent pour

$$u = 0 \qquad \text{ou} \qquad R' = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$u = 0$ se rapporte à l'hypersurface $t + \beta = 0$
Les deux hypersurfaces (ii) déterminent le big bang du modèle.
Si nous considérons alors des temps arbitrairement grands le terme u va aussi devenir grand de telle sorte que

$$\text{sh } u \sim \text{ch } u \sim \frac{1}{2} e^u >> u$$

Alors on a les approximations suivantes :

$$R \sim \frac{1}{8} F (f - 1)^{-1} e^u$$

$$t + \beta \sim \frac{1}{8} F (f - 1)^{-3/2} e^u$$

ou encore :

$$R \sim (f - 1)^{1/2} \cdot t \qquad \text{(iii)}$$

et

$$8\pi\rho \sim 3F' \left[2t^3 \frac{d}{dr} (f - 1)^{3/2} \right]^{-1}$$

Introduisons ce que Bonnor appelle "contrast density" :

$$\sigma = \frac{\partial}{\partial r} \log \rho$$

ici

$$\sigma = \frac{d}{dr} \left\{ \log \frac{F'}{\frac{d}{dr}(f - 1)^{3/2}} \right\} + 0 (t^{-1})$$

σ décrit une fonction de r qui ne sera généralement pas 0.
L'explication physique de cela semble résider dans le fait que lorsque t croît la poussière a échappé à son propre champ de gravitation et qu'ainsi il n'y aura plus rien pour altèrer la distribution de densité.

Dans le cas du modèle homogène $\sigma = 0$, donc(contrairement au cas $f = 1$), si $f > 1$ tous les modèles ne tendent pas vers le modèle de Robertson-Walker correspondant.

Remarquons que le terme $\beta(r)$ n'apparaît plus dans (iii) ce que l'on pourrait interpréter en disant que lorsque t tend vers l'infini le modèle "oublie" son big bang (du moins tant que la densité joue un certain rôle).
Les conditions de régularité imposent que lorsque $t \to 0$ on ait :

$$F(r) \sim r^3 \qquad f(r) = 1 + ar^2 \qquad r\beta'(r) \to 0$$

On a ensuite :

$$F = 4b\ (f - 1)^{3/2} \qquad \text{(II,15)}$$

où b est une constante. Le modèle (i) se réduit alors à :

$$R = b\ (f - 1)^{1/2}\ (\text{ch}\ u - 1)$$

$$t + \beta = b\ (\text{sh}\ u - u)$$

Si nous choisissons $F = 4br^3$ et $f(r) = 1 + r^2$ le modèle ne diffère de son équivalent homogène que par la présence de $\beta(r)$. Ce terme peut ainsi déterminer un grand domaine de conditions initiales, toutes conduisant au même modèle de Robertson-Walker quand $t \to \infty$.

La densité :

$$8\pi\rho = \frac{3}{4}\, b^{-2}\ \text{cosech}^6\ \frac{u}{2}\ \left[\, 1 + \frac{1}{2}\, r\, b^{-1}\, \beta'\ \coth\ \frac{u}{2}\ \text{cosech}^2\ \frac{u}{2}\, \right],$$

montre que β a de l'importance pour u petit et devient très petit lorsque u devient arbitrairement grand.
Ainsi une infinité de modèles tendent vers celui de Robertson-Walker, ceux qui vérifient (II,15).

3.1.4 *SOLUTION POUR $f(r) < 1$*

Dans ce cas nous avons :

$$R = \frac{F}{4}\left[-f + 1\right]^{-1}\left[1 - \cos u\right]$$
$$t - \beta(r) = \frac{F}{4}\left[-f + 1\right]^{-3/2}\left[u - \sin u\right] \qquad (II,16)$$

C'est un modèle elliptique pour lequel les particules ne peuvent atteindre qu'une distance R_{max} donnée par :

$$\frac{F(r)}{R_{max}} = 2\,(1 - f(r)) \qquad (II,17)$$

En ce point où $R = R_{max}$, la vitesse s'annule et change de signe : après une phase d'expansion suit une phase de contraction.
D'autre part insistons bien sur le fait que ces modèles collapsent en un temps fini.

3.1.5 *RECAPITULATION - DETERMINATION DE $f(r)$; $F(r)$; $\beta(r)$*

Lorsque les modèles de Tolman évoluent vers des modèles de Friedmann, il est aisé de déterminer les trois fonctions sur lesqelles s'appuie la solution.
On montre qu'il faut

$$\beta(r) = 0$$
$$F(r) = 2\,a\,r^3$$
$$f(r) = \begin{cases} 1 - r^2 & \text{si } f < 1 \\ 1 & \text{si le modèle est parabolique} \\ 1 + r^2 & \text{si } f > 1 \end{cases}$$

Conditions sur $f(r)$, $F(r)$ et $\beta(r)$ pour obtenir le modèle de Friedmann correspondant. Tableau récapitulatif.

$f(r) < 1$	$f(r) = 1$	$f(r) > 1$
$R = \frac{F}{4}\left[-f+1\right]^{-1}\left[1-\cos u\right]$	$R = \left[\frac{9}{4}F(r)\right]^{1/3}\left[t-\beta(r)\right]^{2/3}$	$R = \frac{F}{4}\left[f-1\right]^{-1}\left[chu-1\right]$
$t-\beta(r) = \frac{F}{4}\left[-f+1\right]^{-3/2}\left[u-\sin u\right]$		$t-\beta(r) = \frac{F}{4}\left[f-1\right]^{-3/2}\left[shu-u\right]$
$f(r) = 1 - r^2$	$f(r) = 1$	$f(r) = 1 + r^2$
$F(r) = 2\,a\,r^3$	$F(r) = 2\,a\,r^3$	$F(r) = 2\,a\,r^3$
$\beta(r) = 0$	$\beta(r) = 0$	$\beta(r) = 0$
$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$
$R = a\,r\,(1 - \cos u)$	$R = (\frac{9}{2}a)^{1/3}\,r\,t^{2/3}$	$R = a\,r\,(chu - 1)$
$t = a\,(u - \sin u)$		$t = a\,(shu - u)$
FRIEDMANN CORRESPONDANT	FRIEDMANN CORRESPONDANT	FRIEDMANN CORRESPONDANT
$k = +1$	$k = 0$	$k = -1$
elliptique	parabolique	hyperbolique
$8\pi\rho = \frac{4}{3t^2}$		

alors il y a équivalence entre les modèles de Tolman et de Friedmann :

$k = -1$	$\longleftrightarrow$	$f > 1$	modèle hyperbolique
$k = 0$	$\longleftrightarrow$	$f = 1$	modèle parabolique
$k = +1$	$\longleftrightarrow$	$f < 1$	modèle elliptique

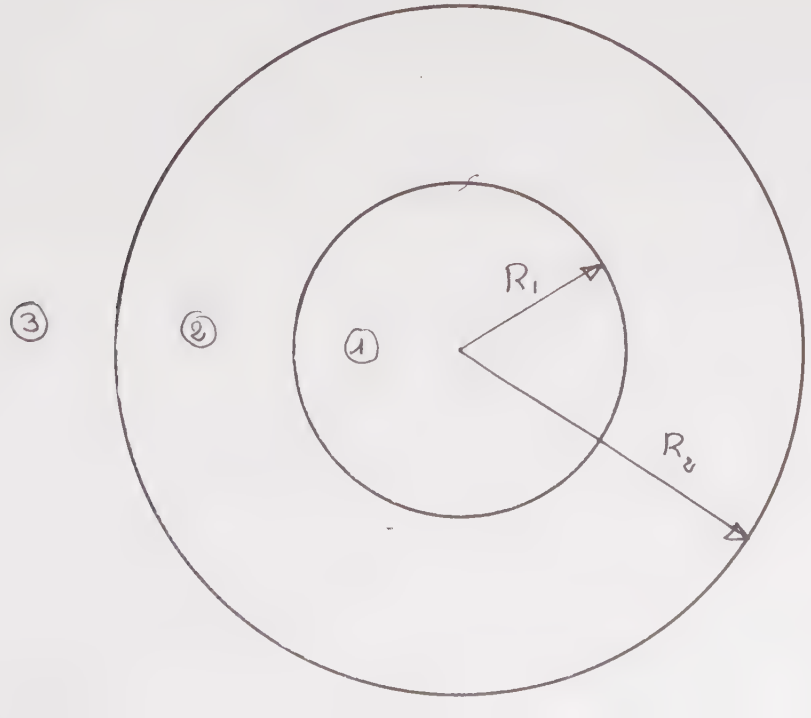
Nous résumons dans le tableau (II,1) les différents résultats.
Mentionnons enfin que la constante d'intégration positive $f(r)$ (Cf II,6) existe sous d'autres formes dans la littérature :

Tolman choisit comme constante $g^2(r)$ tandis que Papapetrou opte pour $1 + h(r)$.

3.2 *INHOMOGENEITES A SYMETRIE SPHERIQUE*

En conservant le but qu'on s'était fixé c'est à dire la description des grandes inhomogénéités dans l'univers (amas) et en utilisant la symétrie sphérique et la solution de Tolman on obtient des modèles à vacuole étudiés par Papapetrou (24) et Mavridès (6) .

Le schéma de départ est celui d'une condensation centrale baignant dans un univers cosmologique.
Nous sommes conduits à décrire trois régions en accord avec la figure



. la région 1 est formée de la condensation centrale dont le rayon est R_1. Elle est décrite par un modèle de Friedmann homogène.

. la région 2 c'est la vacuole comprise entre les rayons R_1 et R_2 qui entoure la condensation 1. Cette région est vide car ses dimensions doivent être les plus petites possibles.

. la région 3 est l'univers cosmologique englobant l'ensemble des régions 1 et 2.

La région 2 étant vide il n'y a pas de condition particulière imposée par contre on reste en ce qui concerne les régions 1 et 3 dans le cas d'un fluide parfait de pression nulle c'est à dire

$$T^{\mu\nu} = u^{\mu} . u^{\nu} . \rho$$

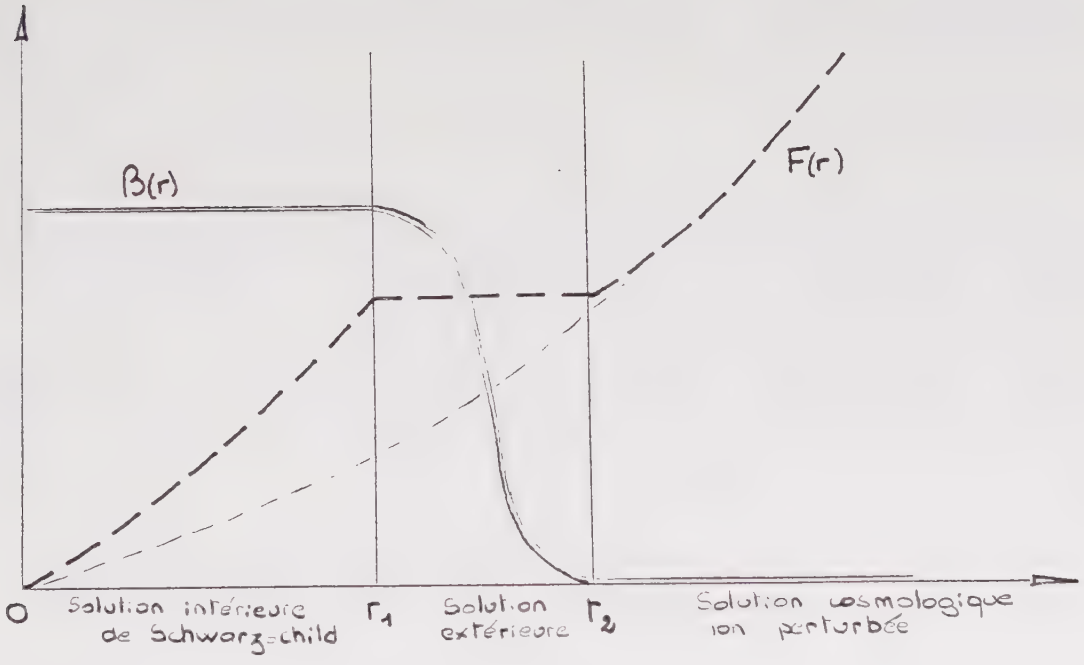
Le problème est décrit par la solution de Tolman et donc les formules (II,8) , (II,9) et (II,10) conviennent.
Selon le choix du modèle de Friedmann nous allons obtenir des résultats légèrement différents.

3.2.1 *SOLUTION POUR LES MODELES PARABOLIQUES*

Choisissant $f(r) = 1$ dans la solution de Tolman on a une condensation décrite par un modèle en expansion. Cette condensation étant elle-même plongée dans un univers en expansion.
Papapetrou (24) à explicité la solution en détail :

$$
(II,18)\quad
\begin{cases}
0 \leqslant r < r_1 & 4R^3 = 9\alpha_1 r^3 \left[t - \beta_o\right]^2 & \\
 & 8\pi\rho_1 = 4/3\ (t - \beta_o)^2 & F(r) = \beta r^3 \\
 & \beta_o = \beta(r) = \text{cte} > 0 & \\
r_1 \leqslant r < r_2 & 4R^3 = 9\alpha_1 r_1^3 \left[t - \beta(r)\right]^2 & \\
 & \rho_2 = 0 & F(r) = F_o = \beta r_1^3 \\
 & \beta'(r) < 0 & \\
r_2 \leqslant r & 4R^3 = 9\alpha_2 r^3 t^2 & \\
 & 8\pi\rho_o = 4/3t^2 & F(r) = \alpha r^3 \\
 & \beta(r) = 0 &
\end{cases}
$$

Ce résultat peut être traduit par la figure : (II,2)



les conditions de raccordement aux frontières (en $r = r_1$ et $r = r_2$) imposent que $\alpha_1 r_1^3 = \alpha_2 r_2^3$.

Pour $r < r_1$ la densité de matière est $\rho = M \left(\frac{4\pi}{3} R_1^3\right)^{-1}$
$M = F_o$ = masse totale contenue dans la sphère de rayon

$$R_1 \quad (r < r_1)$$

avec $$R_1^3 = \frac{9}{4} F_o (t - \beta_o)^2$$

Pour $r = r_2$ la densité moyenne dans la sphère $r = r_2$ égale à la densité de la solution cosmologique non perturbée est :

$$\rho_o = M \left(\frac{4\pi}{3} R_2^3\right)^{-1} \qquad \text{avec} \qquad R_2^3 = \frac{9}{4} F_o t^2$$

il résulte de ces formules que :

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{t}{t-\beta_o}\right)^2$$

Donc à T_o fixé l'expression $\frac{\rho}{\rho_o}$ tend vers 1 quand t tend vers l'infini.
En effet $\dot{R} = \frac{2R}{3(t-\beta)}$ (II,19)

La matière contenue dans la perturbation a une expansion plus rapide que l'expansion dans la partie non perturbée. C'est à dire que le big bang de la région 1 est retardé par rapport à celui de la région 3.

Une application de cette solution a été donnée par Mavridès (6) En effet on est conduit à calculer la vitesse d'expansion dans les régions 1 et 2.

$$H_1 = \frac{2}{3(t-T_o)} \sim 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

$$H_2 = \frac{2}{3t} \sim 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

Ces valeurs correspondraient à un effet récemment mis en évidence par Rubin-Ford-Rubin. Mais cet effet étant fortement contesté on ne peut qu'ajouter qu'il existe un modèle théorique décrivant cet effet, si effet il y a ....

D'autre part le fait de décrire la condensation par un modèle en expansion n'est pas particulièrement heureux. En effet on émet l'hypothèse que les amas de galaxies (ou les galaxies) à la manière des étoiles peuvent collapser. Alors il serait plus naturel de décrire la condensation à l'aide d'un modèle de Friedmann elliptique.

3.2.2. *CONDENSATION DECRITE PAR UN MODELE ELLIPTIQUE*

Maintenant la condensation est traitée à l'aide d'un modèle elliptique. Elle est toujours englobée par une vacuole le tout étant plongé dans l'univers pour lequel sera utilisé un modèle parabolique.

Les régions 1 , 2 et 3 ont le comportement suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
0 < r < r_1 \qquad \text{modèle de Friedmann} \quad k = +1 \\
\qquad \left\{ \begin{array}{l} R = a\,r\,(1 - \cos u) \\ t = \beta_o = a\,(u - \sin u) \end{array} \right. \\
\qquad f(r) = 1 - r^2 \quad F(r) = 2ar^3 \quad \beta(r) = \beta_o = c^{te} \\
\qquad 8\pi\rho_1 \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 6a \\
\\
r_1 < r < r_2 \quad F = c^{te} = 2ar_1^3 \quad \rho_2 = 0 \quad 0 < f(r) < 1 \\
\qquad \left\{ \begin{array}{l} R = \dfrac{ar_1^3}{-\left[1 + f(r)\right]} \quad (1 - \cos u) \\ t - \beta(r) = \dfrac{ar_1^3}{\left[-(1+f(r))\right]^{3/2}} \quad (u - \sin u) \end{array} \right. \\
\\
r_2 < r \qquad \text{modèle de Friedmann} \quad k = 0 \\
\qquad f(r) = 1 \quad F(r) = 2\,a'r^3 \\
\qquad R = \left(\frac{9}{2}\,a'\right)^{1/3} \cdot r \cdot t^{2/3} \\
\qquad 8\pi\rho_o = \dfrac{4}{3t^2}
\end{array}
\right. \qquad (II,20)
$$

Les conditions de raccordement sont telles que :

$$F(r_1) = 2a\,r_1^3 = F(r_2) = 2a'\,r_2^3$$

Les fonctions $F(r)$ et $T(r)$ ont le même aspect que dans la solution décrite par un modèle parabolique.

3.2.3 *APPROXIMATION DU MODELE ELLIPTIQUE A UN ARC DE CERCLE*

Le modèle de Friedmann elliptique ($k = +1$) correspond à un univers de type oscillant. Le schéma $R(t)$ de ce modèle a été mentionné sous la notation O_1 dans le tableau $(I,1)$.
La courbe $R(t)$ décrit un arc d'ellipse depuis l'instant $t = 0$ du Big Bang jusqu'à l'instant t_M correspondant à R_{MAX} (rayon maximum d'un tel univers).
Mais de la même façon que les trajectoires des planètes autour du Soleil sont des ellipses à excentricité très faibles (donc assimilables à un cercle en première approximation), il semble raisonnable de décrire un modèle elliptique à l'aide des équations du cercle (en première approximation).

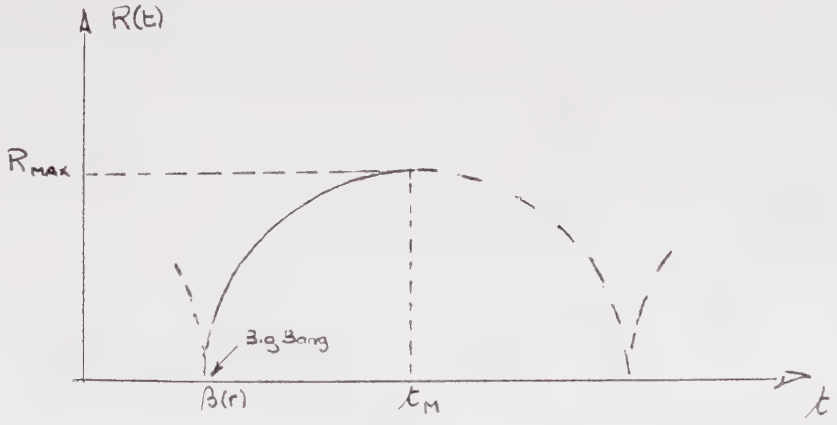
Avec une telle approximation la perturbation décrite par un modèle elliptique dont l'équation était :

$$\begin{cases} R = ar\ (1 - \cos u) \\ t - \beta(r) = a\ (u - \sin u) \end{cases} \qquad \text{avec } \frac{F(r)}{R_{MAX}} = 2(1 - f),$$

va être étudiée à l'aide de :

$$\begin{cases} (t - t_M)^2 + R^2(t) = R^2_{MAX} \\ R(t) > 0 \end{cases} \qquad (II,21)$$

Le schéma est le suivant :



Bien sûr on a $t_M = R_{MAX} + \beta(r)$

Alors $(II,21)$ s'écrit :

$$R(t)^2 = R^2_{MAX} - \left[t - (R_{MAX} + \beta(r)) \right]^2$$
$$= R^2_{MAX} - \left[(t - \beta(r)) - R_{MAX} \right]^2$$

$$= \cancel{R^2_{MAX}} - (t-\beta(r))^2 - \cancel{R^2_{MAX}} + 2R_{MAX}\ (t-\beta(r))$$

Soit $$R^2(t) = 2R_{MAX}\ (t-\beta(r)) - (t-\beta(r))^2 \qquad (II,22)$$

Supposons alors que l'inhomogénéité soit régie par un modèle elliptique (avec approximation) placée dans un univers de type elliptique (lui-même approximé). Avec les notations utilisées jusqu'à maintenant on a :

pour $r < r_1$ $\qquad \rho = M\ (\frac{4\pi}{3}\ R_1^3)^{-1}$

où R_1 est donné par (II,22)

pour $r = r_2$ $\qquad \rho_o = M\ (\frac{4\pi}{3}\ R_2^3)^{-1}$

avec $R_2(t) = \left[2R'_{MAX}\ t - t^2\right]^{1/2}$

d'où $$\frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = \left[\frac{2R'_{MAX}\ t - t^2}{2R_{MAX}\ t - 2R_{MAX}\ \beta(r) - t^2 + 2t\ \beta(r) - \beta(r)^2}\right]^{3/2}$$

$$= \left[\frac{-t^2 + 2R'_{MAX}\cdot\ t}{-t^2 + (2R_{MAX} + 2\beta)\ t - 2R_{MAX}\cdot\ \beta - \beta^2}\right]^{3/2}$$

Considérons une autre expression de (II,22) pour laquelle on remplace R_{MAX} par $t_M - \beta(r)$:

$$R^2(t) = -t^2 + 2\ t\ t_M - 2t_M\ \beta(r) + \beta(r)^2 \qquad (II,23)$$

Avec cette forme $\frac{\rho}{\rho_o}$ s'écrit :

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = \left(\frac{-t^2 + 2\ t\ t'_M}{-t^2 + 2\ t\ t_M - 2t_M\beta(r) + \beta(r)^2}\right)^{3_2}$$

t'_M correspond au temps où l'univers atteint sont rayon maximum

t_M correspond au temps où l'inhomogénéité atteint son R_{MAX}

$\beta(r)$ correspond au retard du Big Bang de l'inhomogénéité par rapport au Big Bang de l'univers.

lorsque $t \longrightarrow t'_M$: $\dfrac{\rho}{\rho_o} \longrightarrow \left(\dfrac{+ t'^2_M}{- t'^2_M + 2\, t'_M\, t_M - 2 t_M\, \beta(r) + \beta(r)^2} \right)^{3/2}$

* On peut considérer que $\beta(r)$ devient négligeable par rapport a t lorsque $t \longrightarrow t'_M$ et par suite :

$$\frac{\rho}{\rho_o} \longrightarrow \left(\frac{t'_M}{t'^2_M + 2 t'_M\, t_M} \right)^{3/2} = \left(\frac{1}{2\frac{t_M}{t'_M} - 1} \right)^{3/2}$$

Cas 1 β) Si l'inhomogénéité atteint son maximum avant que l'univers ne l'atteigne on a : $t_M < t'_M$

et donc en t_M $\rho > \rho_o$ $\left(\dfrac{\rho}{\rho_o} > 1 \right)$

la perturbation n'a pas eu le temps de se fondre au moment où elle collapse.

Cas 2 α) Si l'inhomogénéité atteint son maximum en même temps que l'univers alors $t'_M = t_M$ et $\rho \longrightarrow \rho_o$

la perturbation acquiert la même densité que l'univers ; elle s'est fondue dans le "gaz universel".

* Toutefois il n'est pas possible de négliger $\beta(r)$ lorsque l'inhomogénéité se forme dans des temps très avancés (mais est-ce réaliste ?).

Cas 3 dans ce cas : $\dfrac{\rho}{\rho_o} \longrightarrow \left[\dfrac{t\,(2t'_M - t)}{(t - \beta)(2t_M - t - \beta)} \right]^{3/2}$

Si nous considérons l'inhomogénéité décrite par un modèle elliptique (corrigé) plongé dans un univers décrit par un modèle parabolique on a :

$$r < r_1 \qquad R_1^2(t) = 2R_{MAX}\,(t - \beta(r)) - (t - \beta(r))^2$$

$$= - t^2 + 2t\,t_M - 2t_M\,\beta(r) + \beta(r)^2$$

$$r = r_2 \qquad R_1^2(t) = \left(\frac{9}{4} F_o\, t^{2/3}\right)^2$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = \left[\frac{\frac{9}{4} F_o\, t^{2/3}{}^2}{- t^2 + 2t_M\, t - 2t_M\,\beta(r) + \beta(r)^2}\right]^{3/2}$$

$$= \left(\frac{9}{4} F_o\right)^3 \frac{t^2}{(- t^2 + 2t_M\, t - 2t_M\,\beta(r) + \beta(r)^2)^{3/2}}$$

quand $t \longrightarrow t_M$ $\qquad \beta(r) \ll t$ donc :

$$\frac{\rho}{\rho_o} \longrightarrow \left(\frac{9}{4} F_o\right)^3 \frac{t_M^2}{t_M^3} = \frac{K}{t_M}$$

N.B. : on retrouve bien ρ et $\rho_o \longrightarrow 0$ si t_M très grand.

Dans tous les cas, lorsque $t \longrightarrow \infty$, $\rho_o \longrightarrow 0$.

3.3 *MODELES SANS SYMETRIE SPATIALE*

L'inconvénient de la solution de Tolman est la symétrie sphérique. Récemment Szekeres, repris par Bonnor et Tomimura [26] a trouvé les modèles de fluide irrotationnel et inhomogène, sans symétrie spatiale. Ces modèles évoluent vers des modèles homogènes dans certains cas.

Utilisant la notation de Szekeres, la métrique s'écrit :

$$ds^2 = - Q^2\, dx^2 - R^2\, (dy^2 + h^2\, dz^2) + dt^2$$

où $Q = AR + T$, $A = A(x,y,z)$, $R = R(t)$, $T = T(x,t)$, $h = h(y)$

R vérifie l'équation :

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 = - k$$

$(k = 0, \pm 1)$ tandis que h satisfait à :

$$\frac{d^2h}{dy^2} = - kh$$

On est alors conduits à la calssification suivante :

Modèles paraboliques $\quad k = 0, \quad h = 1$

$$A = \beta(y^2 + z^2) + \sigma y + \nu z + \omega$$

P.I $\qquad R = t^{2/3} \quad T = \frac{9}{5}\, \beta t^{4/3} + \mu t^{-1/3} \qquad (t > 0)$

$$8\pi\rho = \frac{4A}{3QR^2}$$

P.II $\qquad R = 1 \quad T = \beta t^2 + \mu t \quad (t > t_o \ (x,y,z)$

$q\ (t_o, x,y,z) = 0)$

$$8\pi\rho = - \frac{4\beta}{Q}$$

Modèles hyperboliques $k = -1$

h peut prendre les valeurs $h = \begin{cases} \text{ch } y \\ \text{sh } y \\ e^y \end{cases}$

nous nous contentons de donner les résultats pour $h = \text{ch } y$:

$$A = (\sigma \text{ ch } z + \nu \text{ sh } z) \text{ ch} y + \omega \text{ sh } y$$

H.I $\quad R = 2K \text{ sh}^2 u/2 \qquad t = K (\text{sh } u - u) \quad (K > 0)$

$$T = \beta \left(\frac{u}{2} \coth \frac{u}{2} - 1\right) + \mu \coth \frac{u}{2} \qquad (t > 0)$$

$$8\pi\rho = \frac{6KA + \beta}{QR^2}$$

H.II $\quad R = 2K \text{ ch}^2 v/2 \qquad t = K (v + \text{sh } v) \qquad K > 0 \quad -\infty < t < +\infty$

$$T = \beta \left(\frac{v}{2} \text{th} \frac{v}{2} - 1\right) + \mu \text{ th} \frac{v}{2}$$

$$8\pi\rho = \frac{\beta - 6KA}{QR^2}$$

H.III $\quad R = t \quad (t > 0)$

$$T = \beta \log t + \mu$$

$$8\pi\rho = \frac{2\beta}{QR^2}$$

Modèle elliptique $\quad k = +1 \qquad h = \text{sh } y$

E.I $\quad A = |\sigma \cos z + \nu \sin z) \sin y + \omega \cos y|$

$$R = 2K \sin^2 \frac{w}{2} \; ; \; t = K (w - \sin w)$$

$$(K > 0) \quad (0 < t < 2\pi K)$$

$$T = \beta \left(\frac{w}{2} \cot \frac{w}{2} - 1\right) + \mu \cot \frac{w}{2}$$

$$8\pi\rho = \frac{6KA - \beta}{QR^2}$$

L'étude de l'évolution de ces modèles confirme les résultats obtenus pour ceux à symétrie sphérique à savoir que les modèles de Friedmann peuvent être obtenus à partir d'une très grande variété de cas. Leur évolution éventuelle vers les modèles homogènes est telle que :

P.I	Einstein - de Sitter
P.II	plat
H.I	hyperbolique
H.II	hyperbolique (sans big bang et avec $\rho < 0$)
H.III	plat (modèle de Milne)
E.I	elliptique

Par analogie avec l'étude faite sur les modèles à symétrie sphérique, il serait intéressant d'étudier les applications éventuelles de ces modèles aux inhomogénéités rencontrées habituellement.

4. POURQUOI L'ISOTROPIE ACTUELLE ?

C'est la question que l'on se pose face à la remarquable isotropie du rayonnement à 3°K.

Nous avons vu dans la deuxième partie comment Hawking et Collins ont exhibé une solution au problème de l'isotropie à l'échelle de l'Univers. Les résultats se résument en très peu de phrases. Pour que l'univers en expansion reste isotrope alors que le temps augmente indéfiniment, il est nécessaire que sa vitesse d'expansion corresponde à ce que nous avons appelé la vitesse critique H_c :

$$H_c = \left(\frac{8\pi f \rho}{3c^2} \right)^{1/2}$$

En effet si la vitesse d'expansion avait été supérieure à la valeur H_c la matière n'aurait eu aucune signification dynamique au moment de la formation de l'univers. Peut être même le stade de l'atome n'aurait pu être atteint condamnant ainsi l'univers à être en expansion continue sans contenir de grands systèmes gravitationellement liés.

De façon semblable, si la vitesse H avait été inférieure à la vitesse H_c les systèmes gravitationnellement liés auraient pu être réalisés, mais on pense que les modèles elliptiques recollapsent avant d'atteindre le rayon actuel de l'univers.

L'explication de l'isotropie actuelle de l'univers est alors que le taux d'expansion actuel H_a est presque égal à la valeur critique H_c.

Mais, peut-on alors se demander : pourquoi l'univers est en expansion à une vitesse si proche de la vitesse critique ? Une élégante explication en a été donnée par Dike et Carter (26). L'idée est qu'il y a certaines conditions qui sont nécessaires au développement de la vie intelligente : sur tous les univers concevables, seuls ceux pour lesquels ces conditions seront réunies permettront l'apparition d'êtres pour observer l'univers.

L'existence de galaxies (et d'une manière générale de systèmes gravitationnellement liés tels que étoiles, galaxies, amas...) semble être une précondition nécessaire pour le développement de toute forme de vie intelligente. Egalement, une échelle de temps suffisamment longue pour que l'évolution biologique se produise est très utile.

Ainsi au vu des résultats précédents, le développement de la vie semble lié à la vitesse d'expansion de l'univers.

Avec $H < H_c$ la vie n'aurait pas le temps de se développer avant le collapse.

Avec $H > H_c$ on a vu qu'il n'existait pas de support stable pour la vie.

La conclusion qui semble ainsi se dégager est que l'isotropie de l'univers et notre existence sont toutes deux les résultats du fait que l'univers est en expansion juste au taux d'expansion critique.
Vu d'une autre façon, on peut même ajouter que nous ne pourrions observer l'univers dans un état différent si nous n'étions pas là et qu'ainsi l'isotropie de l'univers est une conséquence de notre existence.

A partir de là on réalise le caractère extrêmement nouveau de ces idées. Et c'est aussi cette limite, où beaucoup d'idées étrangères à la physique viennent se méler, qui constitue une menace pour la rigueur des démonstrations habituelles. Peut être sera-ce une nécessité dans les études à venir.

Déjà de telles démonstrations peuvent être employées pour l'utilisation des modèles à symétrie sphérique. En effet la symétrie sphérique est entachée de l'idée d'anthropocentrisme. Aussi en suivant un cheminement analogue à celui de Hawking et Collins on peut dire que la question n'est plus de savoir si l'univerrs a été de façon anthropocentrique mais plutôt de réaliser que la vie telle qu'on la connait est apparue dans la région la plus probable où la vie puisse apparaître. Les modèles de type Tolman pourraient voir leur champ d'application plus étendu.

On comprendra aisément pourquoi l'exposé de telles idées a été volontairement séparé par un chapitre qui lui est réservé. En s'abstenant de formuler un quelconque jugement de valeur sur ces idées, il était tout de même nécessaire de les énoncer.

C O N C L U S I O N

Les modèles de Friedmann, par leur aptitude à décrire les quelques phénomènes connus à ce jour et par leur simplicité tendent à s'imposer. Toutefois, l'explication qu'ils nous donnent de l'univers se situe sur une très grande échelle. Quelques travaux ont ces dernières années porté sur les inhomogénéités ainsi que sur les modèles susceptibles de les décrire. Pour ce qui est des premiers résultats, il semble que les modèles à symétrie sphérique fournissent une explication à certaines anisotropies constatées. Explications qui sont bien évidemment issues des théories relativistes classiques.

Ultérieurement il serait certainement nécessaire d'affiner la partie concernant l'inhomogénéité elle-même. Peut-être qu'en considérant un fluide inhomogène plongé dans un univers en expansion nous perviendrons à des mesures plus fines. Egalement la possibilité d'abandonner la symétrie sphérique serait à envisager. Dans tous les cas les calculs s'en trouveraient considérablement compliqués.

Il ne faut pas oublier que nous ignorons toujours le type de modèle auquel notre univers peut s'apparenter. La détermination de ce problème semble devoir relever de l'expérimentation bien que des considérations théoriques permettent d'accorder un plus grand crédit à l'un plutôt qu'à l'autre. Une telle détermination simplifierait considérablement le travail théorique ; tout modèle inhomogène devant inévitablement évoluer vers l'univers (unique) auquel nous appartenons.

Pour ce qui est de la remarquable isotropie de notre univers, est-elle l'évolution "logique" à partir de données initiales encore mal définies? ou peut-être est-elle indispensable à l'apparition de la vie.

Beaucoup de questions dont la réponse passe entre autre par une meilleure compréhension de l'interaction entre l'inhomogénéité et le modèle décrivant l'univers.

D'autre part, la constante cosmologique Λ n'est peut-être pas forcément nulle (bien qu'on la sache extrémement petite) et une recherche en considérant cette hypothèse serait éventuellement fructueuse.

Des explorations théoriques dans des domaines aussi divers sont nécessaires pour faire coïncider résultats expérimentaux et théorie (par exemple les difficultés rencontrées pour l'anisotropie de la loi de Hubble ou les quasars) mais également pour sélectionner le modèle le plus propre à décrire notre univers.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1 BONDI H. (1960) Cosmology, Cambridge University Press.

2 ROBERTSON H.P. (1933) Rev. Mod. Phys. 5,62.

3 GÖDEL K. (1949) Rev. Mod. Phys. 21, 447.

4 COLLINS C.B. et HAWKING S.W. (1973) Ap. J. 180, 317.

5 EINSTEIN A. et STRAUS E.G. (1945) Rev. Mod. Phys. 17, n° 2 et 3, 120.

6 MAVRIDES S. (1976) C.R. Acad. Sci., A, 282, n° 8, 451.

7 SCHÜCKING E. et HECKMANN O. "World Models" XIème Conseil de Physique Solvay (1958) Bruxelles, Stoops p. 149.

8 PETROV A.Z. (1959) in "les théories relativistes de la gravitation" Colloque du CNRS Royaumont ed. (1962).

9 PETROV A.Z. (1962) Recents developpements in general relativity Pergamon Press p. 371 et 379.

10 PIRANI F.A.E. (1962) Recents developpements in general relativity Pergamon Press. p. 89;

11 BIANCHI L. (1897) Mem. Soc. Ital. Sci. IIIa 11, 267.

12 TAUB A.H. (1951) Ann. Math. 53, 472.

13 ESTABROOK F.B. - WAHLQUIST H.D. - BEHR C.G. (1968) J. Math. Phys. 9, 497.

14 ELLIS G.F.R. et Mac CALLUM M.A.H. (1969) Commun. Math. Phys. 19, 31.

15 Mac CALLUM M.A.H. (1971) Comm. Math. Phys. 20, 57.

16 MISNER C.W. (1968) Battelles Rencontres ed. CH de Witt et J.B. WHEELER, New-York. Benjamin.

17 MISNER C.W. (1968) Ap. J. 151, 431.

18 ZEL'DOVICH Ya.B. (1970) Translation (1971) JETP Lett. 12, 307.

19 SACHS R.K et WOLF A.M. (1967) Astrophys. J. 147, 43.

20 REES M.J. et SCIAMA D.W. (1968) Nature 217, 511.

21 MATZNER R.A. et SHEPLEY L.C. et WARDEN J.B. (1970) Ann. Phys. 57, 401.

22 TOLMAN R.C. (1934) Proc. Nat. Acad. Sci. 20, 169.

23 BONNOR W.B. (1974) Mon. Not. R. astr. Soc. 167, 55.

24 PAPAPETROU A. (1976) Ann. Inst. Henri Poincaré XXIV, N° 2, 165, Section A.

25 RUBIN V.C. - FORD W.K. - RUBIN J.S. (1973) Ap. J. Lett. 183, L111.

26 BONNOR W.B. et TOMIMURA N. (1976) Mon. Not. R. astr. Soc. 175, 85-93.

27 DICKE R.H. (1961) Nature 192, 440.

Ouvrages Généraux :

ANDRILLAT H. (1970) Introduction à l'étude des Cosmologies.

LANDAU L. et LIFCHITZ E. Théorie des Champs MIR A. Colin.

MAVRIDES S. (1973) L'Univers Relativiste. Masson.

MISNER C.W. - THORNE K.S. - WHEELER J.A. Gravitation. Freeman.

Egalement : Théories Cosmologiques - XX° cours de perfectionnement de l'Association Vaudoise des chercheurs en physique, Zermatt, avril 1978.